

JOURNAL
INTERNATIONAL
D'ACOUSTIQUE

sous le patronage
du Groupement des Acousticiens
de Langue Française

INTERNATIONAL
JOURNAL
ON ACOUSTICS

sponsored by the Acoustics Group
of the Physical Society
(Great Britain)

INTERNATIONALE
AKUSTISCHE
ZEITSCHRIFT

unter Mitwirkung
des Verbandes Deutscher
Physikalischer Gesellschaften

ACUSTICA

edited by

Prof. Dr. M. GRÜTZMACHER

editor-in-chief

BRAUNSCHWEIG

publié par

Dr. F. CANAC
MARSEILLE

Prof. Dr. E. G. RICHARDSON
NEWCASTLE UPON TYNE

herausgegeben von

Prof. Dr. E. MEYER
GÖTTINGEN

assisté par

assisted by

unter Mitarbeit von

Prof. W. FURRER, Bern; Prof. Dr. A. GIACOMINI, Roma; Prof. Dr. J. HOLTSMARK, Oslo;
Prof. Dr. F. INGERSLEV, København; Prof. Dr. A. VAN ITTERBEEK, Leuven; Prof. Dr. C. W. KOSTEN, Delft

Managing editor: F. RÜHMANN, ULM (DONAU)

S. HIRZEL VERLAG · ZÜRICH

Vol. 6

1956

Satz und Druck der Hefte 1 bis 4 der ACUSTICA: AG. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich

Satz und Druck der Hefte 5 und 6 der ACUSTICA: K. Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg

Satz und Druck des Akustischen Beiheftes 1/56: VDI-Verlag, Düsseldorf

Satz und Druck des Akustischen Beiheftes 2/56: L. C. Wittich, Druckerei und Verlag, Darmstadt

To all our Subscribers

At the end of 1955, Professor Dr ir C. W. KOSTEN retired at his own request from the honorary position of Editor-in-Chief of ACUSTICA. The inception of the new international journal of acoustics in 1951 was in large measure due to him; all must realize, however, that it is one thing to initiate a new scientific journal and another to make the project a "going concern". Professor Kosten in accepting the chief editorship undertook this burden with his characteristic energy and enthusiasm so that we can now say largely through his efforts the journal is established.

Professor Kosten undertook new organisational and editorial duties with the holding of the First International Congress on Acoustics in 1953, but when the Proceedings of this Congress had been published he felt that, he should vacate the Chair. We were very loath to accept his suggestion but we had to realize that the heavy initial work on the journal had occupied too much of his time and prevented his doing research. We feel sure it is your wish that we should express our gratitude to him for all that he has done for ACUSTICA.

Meanwhile a majority of the three Groups which originally sponsored ACUSTICA had decided that the Editors in future should be chosen from scientists who have, as native language, one of the three languages in which the journal is written. To replace Professor Kosten was not easy but eventually we persuaded Professor Dr. phil. M. GRÜTZMACHER to occupy the editorial Chair for a term. He has had considerable editorial experience and we are sure that ACUSTICA will flourish under his leadership.

Under the new ruling, Professor Dott. GIACOMINI, to whom we owe much valuable advice and publicity for our journal, retires as Editor, but we are fortunate in that we shall still have his counsel, as well as that of Professor Kosten, on the Board of Consulting Editors which has been set up to promote the welfare of ACUSTICA in those countries of Europe not represented by an Acting Editor.

January 1st, 1956

F. CANAC — E. MEYER — E. G. RICHARDSON

ZUR FORMGEBUNG VON HALLRÄUMEN FÜR MESSZWECKE

von G. VENZKE

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig

Zusammenfassung

In einer Reihe von Hallräumen verschiedener Form und Größe wurde die Häufigkeit des Auftretens stark durchhängender Nachhallkurven untersucht unter Zugrundelegung der im Entwurf DIN 52212 für die Messung des Schallabsorptionsgrades gemachten Empfehlungen. Daneben wurde auch die in Rechteckräumen verschiedener Größe zu erwartende Krümmung der Kurven berechnet. Ferner haben zwei Institute unabhängig voneinander das gleiche Schluckmaterial in je drei Hallräumen von 83 bis 258 m³ Rauminhalt gemessen. Es zeigt sich, daß die Meßunsicherheit, insbesondere bei stark absorbierenden Materialien, mit kleiner werdendem Hallraumvolumen zunimmt. Schiefwinklige Räume mit ebenen Wänden bieten gegenüber Rechteckräumen gleicher Größe nicht unbedingt Vorteile.

Summary

In a series of reverberation rooms of different shapes and sizes the frequency of the occurrence of considerably bent reverberation curves (e. g. double decay) was investigated using the recommendations of German Standard DIN 52212 for the measurement of sound absorption coefficients. At the same time the curvature to be expected of the graphs for rectangular rooms of various sizes was calculated. Besides this, two institutes have independently tested the same absorbent material in three rooms of 83 to 258 m³ volume. It appears that the uncertainty of measurement increases as the room gets smaller, especially with highly absorbent coverings. Rooms with non-parallel plane walls are not necessarily better than those of rectangular form.

Sommaire

On a déterminé dans toute une série de salles de formes et de grandeurs différentes la fréquence d'obtention de courbes de réverbération non-linéaires; cette détermination a été faite conformément aux prescriptions de la Norme DIN 52212, relative à la mesure du coefficient d'absorption acoustique. On a aussi calculé la courbure des courbes à prévoir pour des salles rectangulaires de différentes dimensions. De plus, deux instituts ont étudié, indépendamment l'un de l'autre, le même matériau absorbant dans trois salles ayant de 83 à 258 m³. On constate que l'imprécision des mesures augmente quand le volume de la salle diminue, surtout dans le cas de matériaux fortement absorbants. Des salles avec parois obliques n'offrent pas d'avantages incontestables sur des salles rectangulaires de même grandeur.

1. Einleitung

Die Messung des Absorptionsgrades eines Schallschluckmaterials im diffusen Schallfeld erfolgt aus zwei Gründen:

1. soll dem Raumakustiker die Möglichkeit gegeben werden, zur Erzielung einer bestimmten Nachhallzeit in einem Raum dem Architekten zuverlässige Angaben über die Art und die Abmessungen des einzubringenden Schluckmaterials machen zu können,

2. soll sich die Wirksamkeit verschiedener Schallschluckstoffe untereinander einwandfrei vergleichen lassen.

Die üblicherweise benutzten Auswerteformeln nach SABINE oder EYRING, die den Schallabsorptionsgrad α aus den Nachhallzeiten des Hallraumes mit und ohne Prüfmaterial ableiten, setzen ein diffuses Schallfeld voraus, d. h., es muß zu jedem Zeitpunkt der Schallpegel unabhängig vom Ort im Raum sein, außerdem müssen alle Schallfortpflanzungsrichtungen gleich häufig

oder gleich wahrscheinlich sein. Wird dieser Zustand schon in leeren Hallräumen gebräuchlicher Größe, besonders bei tiefen Frequenzen, kaum noch angenähert erreicht, so ist dies noch viel weniger der Fall, wenn in den Hallraum z. B. 10 bis 20 m² Prüfmaterial eingebracht sind, deren α nahe 1,0 liegt. Der im Hallraum an einem Material gemessene Schallabsorptionsgrad wird also ceteris paribus immer nur in einem Schallfeld gültig sein, dessen Diffusitätsgrad demjenigen entspricht, der bei der Messung vorhanden war. Ferner muß bei den erwähnten Auswerteformeln auch in Kauf genommen werden, daß alle mit der Wellennatur des Schalles zusammenhängenden Erscheinungen, wie Eigentöne des betreffenden Raumes, Beugungerscheinungen an den Kanten der Schluckstoffflächen usw., außer Betracht bleiben.

Die hieraus resultierenden Unzulänglichkeiten des Hallraumverfahrens sind seit langem bekannt und oft genug diskutiert worden [1], [2], [3].

Gerade für die oben erwähnte zweite Nutzenwendung der Hallraummessungen des Schallabsorptionsgrades ist es besonders nachteilig, daß die in verschiedenen Hallräumen am gleichen Material gemessenen Werte immer noch trotz aller Bemühungen um eine Einheitlichkeit des Meßverfahrens bei hochwirksamen Schluckstoffen erheblich mehr voneinander abweichen, als es der Meßgenauigkeit der einzelnen an den verschiedenen Vergleichsmessungen beteiligten Institute entspricht. Schon seit über 20 Jahren wurde wiederholt festgestellt, daß die gemessenen α im großen und ganzen mit abnehmendem Hallraumvolumen kleiner werden [1], [4]. Weiter unten wird dies an Hand einer kürzlich durchgeführten Messung gezeigt. Diese Volumenabhängigkeit ist überdies von der Frequenz und von α selbst abhängig.

In den USA hat man seinerzeit festgestellt, daß die größeren Hallräume der gleichen Größenordnung (280 bis 480 m³) maximale Abweichungen des Absorptionsgrades von 0,1 bei einem Material mit einem α bis 0,9 aufweisen. An diesem Vergleich waren beteiligt: National Bureau of Standards, Riverbank und Johns-Manville Laboratories [3], [5]. Der amerikanische Herstellerverband von Schallschluckmaterialien (Acoustical Materials Association) hat aus der Hallraumabhängigkeit der Meßergebnisse damals rigoros die Konsequenzen gezogen und ließ seine Materialien nur noch in einem Hallraum (Johns-Manville) messen. Dies ist zwar eine praktische Lösung, insbesondere hinsichtlich der Forderung der Vergleichbarkeit der Ergebnisse, befriedigt aber wissenschaftlich nur wenig.

Die deutschen Vergleichsmessungen, die 1939 und 1950 vorgenommen wurden [6], [7], zeigen die oben erwähnte Abhängigkeit des Absorptionsgrades von der Größe des Hallraumes nicht, obwohl auch 1939 vom gleichen Institut am gleichen Material in drei verschiedenen großen Hallräumen gemessen wurde. Allerdings wurde dabei ein Prüfmaterial verwandt, dessen α maximal nur 0,7 bis 0,8 erreichte. Bei den Vergleichsmessungen von 1950 tritt auch keine Volumenabhängigkeit zutage. Offenbar wurde hier der Volumeneffekt durch Streuungen der Meßergebnisse überdeckt, die aus Abweichungen der Meßverfahren der einzelnen Institute voneinander herrührten, welche trotz aller Normung immer noch vorhanden sind. Ungeachtet aller Nachteile wird man vorläufig auf das Hallraumverfahren, bei dem man bisher die Streugrenzen der Ergebnisse aus verschiedenen Instituten offenbar nicht unter $\pm 0,1$ bei hochabsorbierenden Materialien heruntersetzen konnte, nicht verzichten. Die Umrechnung von

Impedanzrohr-Meßergebnissen auf statistischen Schalleinfall und der Vergleich dieses α_{stat} mit im Hallraum gemessenen Absorptionsgraden läßt zwar Rückschlüsse auf den Diffusitätsgrad des Hallraum-Schallfeldes zu. Die Abweichungen der Ergebnisse beider Verfahren sind jedoch ihrer Natur nach nicht durchsichtig genug, so daß man weiterhin beide nebeneinander beibehalten muß [5], [8], [9].

Da es bisher offenbar noch nicht möglich ist, α im diffusen Schallfeld als eine vom Hallraum völlig unabhängige Materialkonstante zu bestimmen, so wird beim Neubau eines Hallraumes immer wieder die Frage aufgeworfen: Welche Hallraumgröße und welche Hallraumform ist im Sinne definierter Meßverhältnisse und größtmöglicher Annäherung an die Schallfeldvoraussetzungen der Auswertformeln am zweckmäßigsten?

Im folgenden soll an Hand einiger Untersuchungen zur Beantwortung dieser Frage ein Beitrag geliefert werden.

2. Die Messung der Nachhallzeit im leeren Hallraum

Das Schallfeld ist im Sinne der bei der Messung des Absorptionsgrades benutzten Nachhallformeln in einem leeren Hallraum ausreichend diffus, wenn die Krümmung der Nachhallkurven verschwindend klein wird. Umgekehrt könnte der Unterschied zwischen Anfangs- und Endneigung einer Nachhallkurve beispielsweise im Pegelbereich von 0 bis -60 dB als Maßstab für den Schalldiffusitätsgrad in dem betreffenden Raum dienen. Nach der von FESHBACH und anderen entwickelten Theorie [10] können durch entsprechende schallzerstreuende Einbauten die für schrägen und für streifenden Schalleinfall mit unterschiedlichen Dämpfungskonstanten verknüpften Eigenschwingungsgruppen eine einheitliche Dämpfung erhalten, die sich wiederum in einer geraden Nachhallkurve bei logarithmischer Registrierung äußern würde, wenn man von den Modulationsschwankungen der Kurve absieht.

Über den Zusammenhang von Hallraumdimensionen und Form der Nachhallkurve haben HUNT, BERANEK und MAA für den Rechteckraum auf wellentheoretischer Basis eingehende Berechnungen angestellt. Der Vergleich der theoretisch zu erwartenden, aus den Abklingvorgängen der verschiedenen Wellenkomplexe mit unterschiedlicher Dämpfung zusammengesetzten Nachhallkurve mit einer Kurve, die punktweise aus einer großen Zahl von Einzelwerten experimentell aufgenommen worden war, ergab sehr gute Übereinstimmung [11].

Nach der üblichen Betrachtungsweise entstehen die Eigenschwingungsgruppen mit unterschiedlichen Dämpfungen in einem Rechteckraum aus der Tatsache, daß ein Teil der Eigenschwingungen senkrecht oder schräg auf alle sechs Raumbegrenzungen auftritt, ein anderer Teil aber ein oder zwei Wandpaare nur streifend berührt und daher weniger gedämpft wird. In der Formel für das Eigenton-schema eines ungedämpften Rechteckraumes

$$f_n = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2}}, \quad (1)$$

in der f_n die Eigenschwingungsfrequenzen, c die Schallgeschwindigkeit, l_x, y, z die Lineardimensionen des Raumes und n_x, y, z ganze Zahlen sowie Null bedeuten, ergäben sich die Wellengruppen dadurch, daß entweder kein n , ein n oder zwei n gleich Null sind. Unter der im leeren Hallraum immer gegebenen Voraussetzung, daß der Wandwiderstand seiner Raumbegrenzungen groß gegen $(\rho c)_{\text{Luft}}$ ist, läßt sich ableiten, daß für die erste Eigentongruppe (alle $n \neq 0$) die Dämpfungskonstante k_n gegeben ist durch

$$k_n = \frac{c}{2} \alpha'_0 \left(\frac{1}{l_x} + \frac{1}{l_y} + \frac{1}{l_z} \right). \quad (2)$$

Hierbei ist der Schluckexponent $\alpha'_0 = \ln(1/\alpha_0)$ und α_0 der für alle Flächen als gleich angenommene Absorptionsgrad der Raumbegrenzungen bei senkrechtem Schalleinfall.

Die genannten Autoren leiten ferner ab, daß die Dämpfungskonstanten für die Wellengruppe 2 gegeben sind durch

$$k_{x,0} = k_n - (1 - \mu_x) \frac{\alpha'_0}{l_x} + \frac{c}{2} \quad (3)$$

und der Wellengruppe 3 durch

$$k_{x,y,0} = k_{x,0} - (1 - \mu_y) \frac{\alpha'_0}{l_y} + \frac{c}{2}. \quad (4)$$

(Der Index $x, 0$ steht für $n_x = 0$, entsprechend der Index $x, y, 0$ für $n_x, n_y = 0$).

Die fehlenden Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes. Die Konstanten μ_x, y, z folgen aus der Theorie der Schallabsorption bei streifendem Einfall zu 0,5 bei überall gleichen Wandwiderständen. (In der zitierten Arbeit steht in den Formeln statt des Faktors $c/2$ der Faktor $c/4$. Dies muß ein Versehen sein.)

Die Abschätzung der Besetzung der einzelnen Eigentongruppen führt zu folgenden Ausdrücken:

Gruppe 1

$$N_n = \frac{4 \pi V f^2 \Delta f}{c^3} \left(1 - \frac{S c}{8 V f} + \frac{L c^2}{8 \pi V f^2} \right), \quad (5)$$

Gruppe 2

$$N_{x,0} = \frac{2 \pi f \Delta f l_y l_z}{c^2} - \frac{(l_y + l_z) \Delta f}{c} \quad (6)$$

$N_{y,0}$ und $N_{z,0}$, cykl.,

Gruppe 3

$$N_{x,y,0} = \frac{2 l_z \Delta f}{c}, \quad N_{y,z,0} = \frac{2 l_x \Delta f}{c} \quad \text{usw.} \quad (7)$$

Hierbei bedeuten:

V	das Volumen	} des Hallraumes,
S	die Gesamtinnenfläche	
L	die Summe der drei Längsdimensionen	
f	die mittlere Frequenz	} des Anregungsgeräusches.
Δf	die Frequenzbreite	

Bei der endgültigen Summation der verschiedenen Wellenkomplexe zur Konstruktion der resultierenden Nachhallkurve sind noch die Eigenschwingungszahlen $N_n, N_{x,0}$ usw.

durch die entsprechenden Quadrate der Dämpfungskonstanten zu teilen, da schwächer gedämpfte Eigentöne stärker angeregt werden als stärker gedämpfte.

Ferner sind die Wellengruppen 2 und 3 mit den Gewichtsfaktoren $\sigma = 1/2$, bzw. $1/4$ zu multiplizieren, die sich aus der Aufstellung von Schallquelle und Mikrophon ergeben. Bei der folgenden Rechnung sind sie gültig für Lautsprecheraufstellung in einer Raumecke und Variation der Mikrophonenaufstellung im Raum, beispielsweise mit einem im Raum rotierenden Mikrophon.

Die zusammenfassende Formel für den theoretisch zu erwartenden Abklingvorgang würde dann lauten:

$$\frac{p^2(t)}{p^2(0)} = C \left(\frac{N_n}{k_n^2} e^{-2k_n t} + \sum_{x,y,z} \frac{N_{x,0} \sigma_{x,0}}{k_{x,0}^2} e^{-2k_{x,0} t} + \sum_{x,y,z} \frac{N_{x,y,0} \sigma_{x,y,0}}{k_{x,y,0}^2} e^{-2k_{x,y,0} t} \right). \quad (8)$$

C ist eine dimensionsbehaftete Proportionalitätskonstante.

Nachfolgend sind nun für zwei verschiedenen große Hallräume diese Abklingkurven dargestellt. Diese Räume haben die Abmessungen

$$2,4 \times 4,2 \times 6,0 \text{ m}^3 = 61 \text{ m}^3 \text{ (Raum a der Abb. 1)}$$

$$4,8 \times 6,5 \times 8,3 \text{ m}^3 = 258 \text{ m}^3 \text{ (Raum b der Abb. 1)}$$

Die Kurven wurden berechnet für die Frequenzen $125 \pm 30 \text{ Hz}$ und $250 \pm 60 \text{ Hz}$, α_0 wurde für beide Frequenzen und beide Hallräume mit dem Wert 0,0096 aus der zitierten Arbeit übernommen [11], gleichfalls die Abmessungen des in der dortigen Abb. 3 (hier Raum a der Abb. 1) untersuchten Hallraumes.

In Abb. 1 sind die so errechneten Nachhallkurven für die zwei Räume eingezeichnet. Die kurzgestrichelte Gerade entspricht der Anfangsneigung der Kurve. Die zwei weiteren noch für jeden Hallraum eingezeichneten Geraden entsprechen den Abklingvorgängen der beiden energiereichsten Wellengruppen. Vergleicht man die Abweichungen der resultierenden Nachhallkurve von der Geraden der Anfangsneigung bei den zwei Räumen und den beiden Frequenzen, so

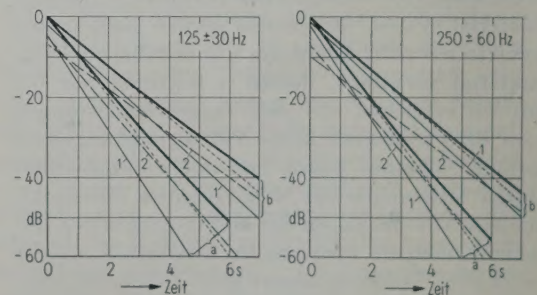


Abb. 1. Rechnerisch ermittelte Nachhallkurven für zwei leere Rechteckräume.

Kurven a: 61 m^3 , Kurven b: 258 m^3 ;

— resultierende Nachhallkurve,
- - - Anfangsneigung der resultierenden Kurve,
- - - Abklingkurve der Wellengruppe 1,
- - - Abklingkurve der Wellengruppe 2.

stellt man fest, daß die Abweichung mit steigendem Volumen und steigender Frequenz kleiner wird. Je kleiner der Hallraum, um so schneller wird die Neigung der der 2. Wellengruppe entsprechenden Geraden für die resultierende Kurve maßgebend. Die Lage des Schnittpunktes der beiden ersten Gruppen entsprechenden Geraden wäre also ein Kriterium für die eindeutige Auswertbarkeit der Nachhallkurven des leeren Hallraumes. Will man den Schnittpunkt auch für 125 Hz beispielsweise erst bei 40 dB unterhalb des Ausgangspegels haben, müßte der Hallraum über 300 m³ groß sein.

Günstig in diesem Sinne wirkt es sich aus, wenn sowohl Lautsprecher wie auch Mikrophon in Raumecken angeordnet sind, da dann der Gewichtsfaktor σ in Gl. (8) durch σ^2 zu ersetzen wäre, wodurch sich der oben erwähnte Schnittpunkt nach niedrigeren Pegeln hin verlagert.

Wie schon erwähnt, haben die zitierten Autoren [11] gute Übereinstimmung zwischen theoretisch zu erwartender Nachhallkurvenform und praktisch gemessenen Kurven gefunden. Sie haben dabei die Schallpegel 0,5, 1,0, 1,5 s usw. nach Abschalten der Schallquelle aus einer sehr großen Zahl von Messungen (je 100 Meßwerte) gemittelt und durch Verbinden der so gewonnenen Punkte die wirklich vorhandene Nachhallkurve hergestellt. Als Schallquelle wurde ein Heulton benutzt, der sich durch besondere Vorrichtungen für alle Registrierungen stets mit der gleichen Phase abschalten ließ. Nach der Theorie muß die Krümmung der Nachhallkurven monoton mit steigender Frequenz abnehmen.

Während in USA der Absorptionsgrad hauptsächlich nur für 6 Standardfrequenzen (128 Hz und Oktaven), aber mit einer großen Zahl von Registrierungen der Nachhallzeiten ermittelt wird, schreibt das in Deutschland für α -Messungen maßgebliche DIN-Blatt 52212 in Terzabständen auf der Frequenzskala liegende Meßpunkte vor. Man begnügt sich dabei im allgemeinen mit sechs bis zehn pro Frequenzpunkt registrierten Kurven, wobei die Schallquelle, Heulton oder aus weißem Rauschen ausgeblendete Terz- oder Oktavbänder, mit beliebigem Zeitpunkt bzw. beliebiger Phase abgeschaltet wird. Es ist vielleicht aufschlußreich zu untersuchen, wie sich in der Praxis unter diesen Bedingungen die Krümmungen der Nachhallkurve auswirken.

In der Abb. 2 ist für drei verschieden große leere Hallräume eine Art Statistik der durchhängenden Nachhallkurven zusammengestellt worden. Für den Pegelabfall zwischen -5 und -35 dB entsprechend den Empfehlungen des

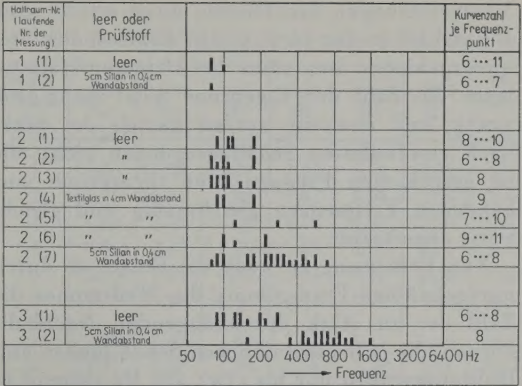


Abb. 2. Häufigkeit stark durchhängender Nachhallkurven in drei Hallräumen verschiedener Größe ohne und mit Prüfstoff.
 | mehr als eine, | nur eine durchhängende Nachhallkurve je Frequenzpunkt.

Entwurfs DIN 52212 wurde dabei der Kurvenverlauf mit einem Lineal überprüft, ob sich noch eine Gerade durch die Nachhallkurve in diesem Pegelintervall hindurchlegen ließ oder die Krümmung so groß war, daß dies nicht mehr eindeutig durchführbar war. Natürlich ist das keine besonders genaue Methode, trotzdem liefert sie einen Überblick, wann und wieviel durchhängende Nachhallkurven auftreten und wie ihre Zahl von Rauminhalt und Form der Hallräume abhängt. Eine genaue Untersuchung der Form der Nachhallkurve im Raum 1 nach dem erwähnten Verfahren [11] ist vorgesehen, schon um festzustellen, wie sich die profilierten Raumbegrenzungen ausgewirkt haben.

In der Abb. 2 sind die Frequenzen, bei denen zwei oder mehr durchhängende Kurven auftreten, mit einem längeren Strich markiert, ein kurzer Strich bezeichnet nur eine einzige als durchhängend festgestellte Kurve unter der Gesamtzahl der bei der betreffenden Frequenz registrierten Kurven. Diese Unterscheidung wurde gemacht, weil einzelne solcher nicht auswertbaren Kurven auch durch Zufälligkeiten der Modulation der Nachhallkurve auftreten können, die eine deutlich sichtbare Krümmung vortäuschen, beispielsweise sehr langsame Schwebungen dicht beieinander liegender, zufällig besonders stark angeregter Eigentöne des Hallraumes.

Aus der Zusammenstellung ist zu entnehmen, daß gemäß der Theorie um so mehr und bei um so höheren Frequenzen durchhängende Nachhallkurven auftreten, je kleiner der Hallraum ist. Daß Zahl und Häufigkeit der Krümmungen nicht monoton mit steigender Frequenz abnehmen, wie es der Theorie entspricht, liegt daran, daß einige

Voraussetzungen der Theorie nicht erfüllt sind. Einmal ist in den in Betracht kommenden Frequenzgebieten, besonders bei kleineren Hallräumen, die Zahl der Eigentöne nicht mehr groß genug, und zweitens werden mittels der praktisch anwendbaren Schallanregungen nicht alle im gerechneten Frequenzband theoretisch vorhandenen Frequenzen gleichmäßig und gleichzeitig abgestrahlt.

Von Bedeutung ist auch die Frage, ob durch unregelmäßige Formgebung des Hallraumes die Zahl der zu stark durchhängenden Nachhallkurven, die ja bei den üblichen Schallquellen und Hallraumgrößen nur bis etwa 500 Hz störend in Erscheinung treten, vermindert werden könnte. In diesem Zusammenhang sind drei etwa gleich große (95 bis 125 m³), aber verschieden geformte Hallräume untersucht worden. Die Grundrisse und Querschnitte aller untersuchten Räume sind in Abb. 3 wiedergegeben. Raum 4 hat keine zueinander parallelen Raumbegrenzungsebenen, Raum 5 ein paralleles Wandpaar, während Raum 6 an Decke und allen Wänden eine zylindrische Wandprofilierung aufweist mit einem Stichmaß von 10 bis 20 cm und Segmentbreiten zwischen 1 und 2 m. Die Schrägstellung der Wände von Raum 4 und 5 betrug etwa 0,8 bis 1,0 m auf jede Längsdimension.

Die Statistik der durchhängenden Kurven in Abb. 4 zeigt, daß der Raum 4 mit den drei nichtparallelen Ebenenpaaren keine Vorteile in dieser Richtung aufweist gegenüber dem gleich großen Rechteckraum der Abb. 2, daß im Gegenteil seine Form sich offensichtlich ungünstig auswirkt. Auch der Raum mit zylindrischen Flächen zeigt in dieser Richtung keine Verbesserung. Entsprechend der Theorie [10] sollte man annehmen, daß profilierte Raumbegrenzungsflächen oder Abweichungen von der Rechteckform die Wellen-

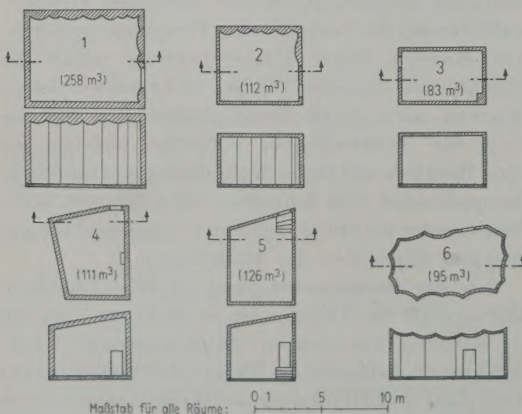


Abb. 3. Grundrisse und Schnitte der untersuchten Hallräume.

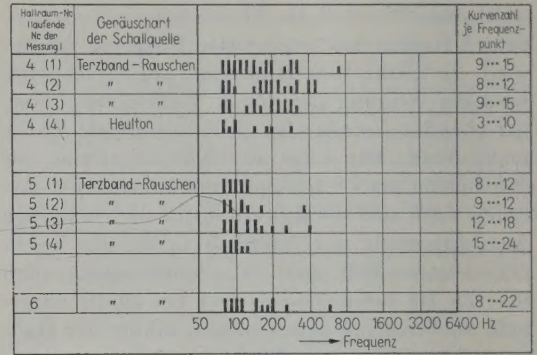


Abb. 4. Häufigkeit stark durchhängender Nachhallkurven in leeren Hallräumen verschiedener Form (Hallraumbezeichnung vergleiche Abb. 3).

■ mehr als eine, □ nur eine durchhängende Nachhallkurve je Frequenzpunkt.

gruppen mit streifendem Einfall reduzieren würden und solche Räume einheitlichere Abklingkonstanten besäßen. Dies ist bei den erwähnten Beispielen nicht festzustellen. Es ist natürlich die Frage, ob die Profilierungen bzw. die Abweichungen von der Rechteckform bei den Wellenlängen, die hier zur Diskussion stehen, überhaupt noch eine Wirkung haben. Es dürfte praktisch nicht möglich sein, in Hallräume der üblichen Größe beispielsweise Wandprofilierungen in genügender Zahl und Größe einzubauen, so daß auch bei Wellenlängen von 2 bis 3 m keine nennenswerten Komponenten mehr mit streifendem Einfall in Erscheinung treten.

Nach der Theorie ist für einen gegebenen Diffusitätsgrad eine bestimmte Anzahl schallzerstreuender Elemente notwendig, die der Schallwellenlänge in ihren Abmessungen zumindest vergleichbar sein müssen. Es liegt auf der Hand, daß sich in einem größeren Hallraum mehr solcher „Diffusoren“ unterbringen lassen als in einem kleineren.

Verschiedentlich wurde vorgeschlagen, Hallräume mit dreieckigem Grundriß und Aufriß zu bauen. Ob dies Vorteile bietet, müssen die Ergebnisse zeigen.

Als drittes wurde die Streuung der Nachhallzeit in Abhängigkeit von Hallraumform und Frequenz untersucht. In Abb. 5 sind die mittleren (zufälligen) Fehler der Einzelmessung der Nachhallzeit für 100 Hz und die fünf darüber liegenden Oktavfrequenzen und für verschiedene leere Hallräume in Prozenten der Nachhallzeiten aufgetragen. Die Zahl der Einzelmessungen je Frequenzpunkt lag dabei zwischen 6 und 20, die Zahl der Meßreihen pro Hallraum zwischen 1 und 4. Die mittleren Fehler sind für jeden Hallraum gemittelt worden.

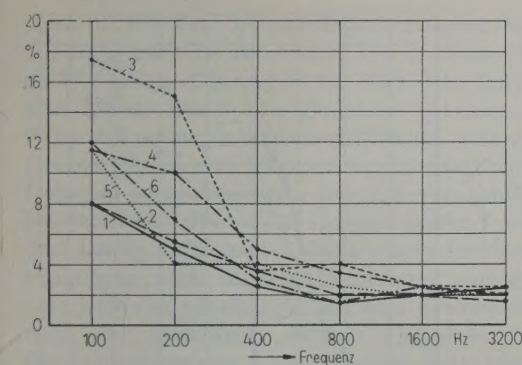


Abb. 5. Mittlerer Fehler bei Nachhallzeitmessungen in leeren Hallräumen (Hallraumbezeichnung vergleiche Abb. 3).

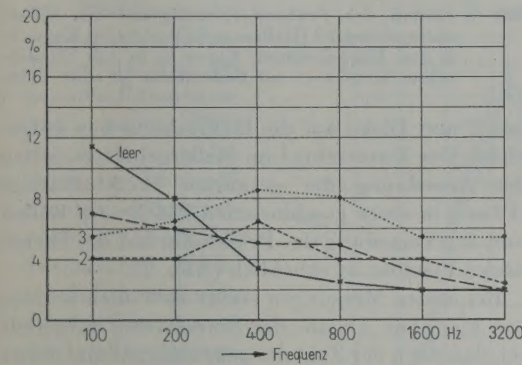


Abb. 6. Mittlerer Fehler bei Nachhallzeitmessungen in drei Hallräumen mit Prüfmaterial. (Zum Vergleich ist der Mittelwert des mittleren Fehlers der leeren Hallräume mit eingetragen.)

Die Streuungen nehmen mit steigender Frequenz ab. Sie sind nur wenig von Hallraumgröße und -form abhängig. Lediglich bei Raum 3 (83 m³) und Raum 4 (111 m³) sind sie in den unteren Frequenzbereichen größer.

In Abb. 6 ist das gleiche für die mit Prüfmaterial (Sillanplatten 5 cm) bestückten Hallräume aufgetragen. Die Zahl der Einzelmessungen lag hierbei zwischen 4 und 20, die der Meßreihen zwischen 3 und 4. Gekrümmte, also nicht auswertbare Nachhallkurven sind nicht mitgezählt worden. Die Streuungen liegen bei 100 und 200 Hz bei allen drei Räumen in der gleichen Höhe wie im leeren Zustand, bei 400 und 800 Hz jedoch höher.

Die dazugehörigen Nachhallzeiten der Räume sind in Tabelle I zusammengestellt.

An der Streuung sind Ablesegenauigkeit, Anregungstatistik und Dämpfungsstatistik beteiligt.

Amerikanische Autoren machen geltend [12], daß Hallräume für Meßzwecke nicht über 100 m³ groß gemacht werden sollten, da mit wachsendem

Tabelle I
Mittlere Nachhallzeiten der untersuchten Hallräume in s

Hallraum Nr.	100 Hz	200 Hz	400 Hz	800 Hz	1600 Hz	3200 Hz	Bemerkung
1	13,55	13,38	10,20	8,08	5,02	2,85	leer
2	13,75	10,31	8,61	7,01	5,06	3,05	leer
3	6,30	5,10	4,10	4,10	3,50	2,50	leer
4	8,58	9,09	7,39	6,68	5,64	3,75	leer
5	5,50	6,31	6,45	5,73	4,70	3,22	leer
6	4,86	5,45	6,46	4,92	4,17	3,40	leer
1	7,20	3,07	1,66	1,52	1,37	1,19	mit
2	4,97	2,32	1,33	1,16	1,26	1,11	Prüf-
3	3,29	1,69	0,99	0,97	1,01	0,93	stoff

Volumen die Luftabsorption in steigendem Maße von Einfluß ist. Die Nachhallzeit eines Raumes unter Berücksichtigung der Luftabsorption ist durch die Gleichung

$$T = \frac{0,163 V}{\bar{\alpha} S + 4 \beta V} \quad (9)$$

gegeben. Dabei ist V das Volumen in m³, S die Gesamtinnenfläche des Raumes in m², $\bar{\alpha}$ der mittlere Schallabsorptionsgrad der Hallraumbegrenzungen im diffusen Schallfeld und β die Dämpfungskonstante in Luft in m⁻¹. β hängt vom Feuchtigkeitsgehalt der Luft und von der Frequenz ab. Da der erste Summand im Nenner nur mit der Innenfläche, der zweite aber mit dem Volumen zunimmt, macht sich besonders bei sehr glatten, gut reflektierenden Hallraumbegrenzungen der Einfluß der Luftabsorption zunehmend bemerkbar.

Auf die Ermittlung von α ist jedoch die Luftabsorption normalerweise ohne nennenswerten Einfluß. Bildet man nämlich die Differenz der Schluckvermögen von leerem Hallraum und vom Hallraum mit Prüfstoff, so heben sich dabei die Summanden, die die Luftabsorption berücksichtigen, heraus. Voraussetzung ist natürlich, daß beide Male unter gleichen Feuchtigkeits- und Temperaturverhältnissen gemessen wurde und die Eigenschaften des Schluckstoffs vom Feuchtigkeitsgehalt der Luft unabhängig sind. Es muß auch dafür gesorgt sein, daß die Luftabsorption nicht erheblich größer ist als das Schluckvermögen des eingebrachten Prüfstoffs.

3. Die Nachhallzeitmessung im Hallraum mit Prüfstoff

Soll α in der üblichen Weise aus der Differenz der Schallschluckvermögen des Hallraumes mit eingebrachtem Prüfstoff und des leeren Hallraumes errechnet werden, so müßten streng genommen zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

1. muß der Diffusitätsgrad des Schallfeldes sowohl bezüglich der Ortsabhängigkeit des Pegels wie auch der Richtungsverteilung in beiden Fällen gleich sein und 2. müßte der Prüfstoff die gesamten Innenflächen des Hallraumes bedecken. Üblicherweise bedeckt man jedoch nur einen Teil einer Fläche des Hallraumes mit dem zu messenden Schallschluckstoff oder man verteilt eine durch Konvention festgesetzte Prüfstofffläche auf drei zueinander senkrechte oder fast senkrechte Flächen. Letztgenanntes Verfahren entspricht der in Deutschland verwendeten Norm DIN 52212 und wurde vorgeschlagen auf Grund der Erfahrungen, die man bei den Absorptionsgrad-Vergleichsmessungen im Jahre 1939 gemacht hatte [8]. Es hatte sich damals gezeigt, daß bei dieser Verteilung des Prüfstoffes die Abweichungen der Ergebnisse aus verschiedenen Hallräumen voneinander am geringsten waren.

Es leuchtet ein, daß bei ungleichförmiger Bedeckung der Raumbegrenzungen mit Schluckstoff gegenüber dem leeren Raum Schallfeldveränderungen auftreten müssen, insbesondere wenn die Prüfflächen einen Absorptionsgrad nahe Eins haben. Ist in einem Rechteckraum mit ebenen Wänden nur eine einzige Raumbegrenzung vollständig mit Schluckstoff bedeckt, so läßt sich mit einigem mathematischen Aufwand ein Zusammenhang zwischen der punktwise aufgenommenen Nachhallkurve in einem solchen Raum und dem Absorptionsgrad des Prüfstoffes herstellen. Auch für ungleichförmige Bedeckung einer Fläche eines Rechteckraumes mit Prüfstoff ist von MAA [13] eine Berechnungsmethode für den Absorptionsgrad auf wellentheoretischer Grundlage angegeben worden. Wegen ihres für Routinemessungen nicht zu bewältigenden Rechenaufwandes hat sie bisher für die Praxis keine Bedeutung gewinnen können.

Auf die Tatsache, daß sich bei Hallraummessungen sehr oft Absorptionsgrade mit Werten erheblich größer als Eins ergeben und daß diese Werte bei dem gleichen Prüfmateriale stark von der Verteilung der Flächen abhängen, sei hier weiter nicht eingegangen. Über die Abhängigkeit des α von der Prüfstoffverteilung bei gleicher Gesamtprüfstoffmenge hat W. KUHL (nach unveröffentlichten Mitteilungen) umfangreiche Erhebungen angestellt.

Hier sei nur als Beispiel eine Messung wiedergegeben, die an 5 cm dicken Sillan- (Steinwolle-) platten vom Raumgewicht 120 kg/m³ im 258 m³ großen Hallraum der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) durchgeführt wurden. Die Faserstoffplatten waren unter Zwischenlage von 10 Papp-Platten pro m² von 10 × 10 cm² Fläche

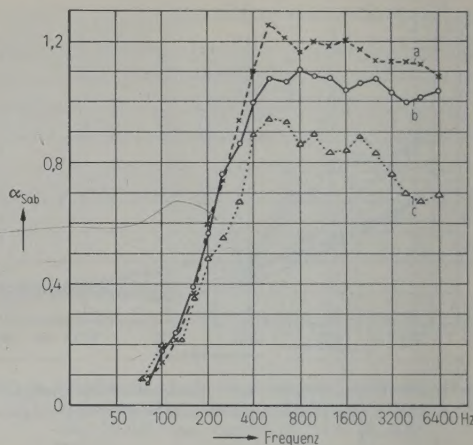


Abb. 7. Einfluß der Prüfstoffverteilung auf den Schallabsorptionsgrad (Hallraum PTB 258 m³); Kurve a: in drei Flächenmitten, Kurve b: in drei Flächenecken, Kurven c: auf Bodenfläche in einer Ecke.

und 2 mm Dicke auf die Hallraumflächen aufgeklebt. Der Unterschied im Meßergebnis zwischen der Anordnung der gesamten Prüfstoffmenge (19 m²) in einer geschlossenen Fläche am Boden und der Verteilung des Prüfstoffes auf die Mitten dreier Flächen ist erheblich (Abb. 7).

Bei diesen Messungen stellte sich auch heraus, was hier ohne Angabe der Einzelheiten mitgeteilt sei, daß nach der Zahl der gekrümmten und daher nicht auswertbaren Nachhallkurven zu urteilen, die Diffusität offenbar größer ist, wenn der Prüfstoff in drei Flächenmitten, als wenn er in drei Ecken oder gar auf dem Boden in einer Fläche angeordnet ist.

Für die gleichen Hallräume wie in Abb. 2 wurde wieder eine Statistik der stark durchhängenden Nachhallkurven aufgestellt. Ein Vergleich mit den entsprechenden Feststellungen bei den leeren Hallräumen würde Hinweise geben, wie sich die Schallfeldverzerrungen durch den eingebrachten Schluckstoff in den Räumen verschiedener Größe auswirken. Bei diesen Nachhallmessungen waren in den betreffenden Hallräumen 8, 11 und 19 m² Sillanplatten mit im Mittel 4 mm Wandabstand angebracht. Die genannten Prüfstoffflächen entsprechen der Empfehlung der DIN 52212, die für die Zuordnung von Prüfstofffläche und Hallraumvolumen die Beziehung

$$S_p = 10 \left(\frac{V}{100} \right)^{2/3} \quad (10)$$

vorschlägt. Als Schallquelle wurde wieder ein Lautsprecher benutzt, der, wie auch bei den übrigen Messungen, in einer Raumecke aufgestellt war und aus weißem Rauschen mit Terzbandpässen verschiedener Tonhöhe ausgeblendete Geräusche ab-

strahlte. Die Zahl der jeweils auftretenden stark durchhängenden Kurven ist in Abb. 2 wieder über der Frequenz aufgetragen. Es zeigt sich, daß bei dem 258-m³-Raum eine Zunahme gekrümmter Nachhallkurven nicht festzustellen ist, während dies bei den kleineren Räumen durchaus der Fall ist. Dabei ist bemerkenswert, daß sich vornehmlich bei dem 83-m³-Raum das Frequenzgebiet besonders häufig auftretender durchhängender Nachhallkurven nach höheren Frequenzen verlagert hat, während offenbar im unteren Frequenzbereich das Schallfeld „diffuser“ geworden ist. Bei hochwirksamen Lochabsorbern z. B. treten allerdings auch im 258-m³-Raum vereinzelt stärker durchhängende Kurven auf.

Beim Vergleich der Messungen des Absorptionsgrades, die in den drei genannten Räumen sowohl von der PTB wie auch vom Institut für Baustoffkunde und Materialprüfung (IBM) der Technischen Hochschule Braunschweig durchgeführt wurden, stellte sich heraus (Abb. 8 und 9), daß im Raum 1 die beiderseitigen Messungen recht gute Übereinstimmung zeigen und daß dies im Raum 2 auch der Fall ist mit Ausnahme des Bereiches zwischen 500 und 800 Hz. Im Raum 3 dagegen sind die Abweichungen erheblich größer, sowohl hinsichtlich des Absorptionsgrades wie auch des von den Abweichungen betroffenen Frequenzgebietes. Untersuchungen zur Klärung dieser Abweichungen sind noch im Gange. Bemerkenswert ist, daß sich offenbar geringe Unterschiede in den

Verfahren oder Apparaturen verschiedener Institute bei den Messungen im 258-m³-Raum so gut wie gar nicht auswirken, während dies im 112-m³-Raum schon deutlich der Fall ist und im 83-m³-Raum in noch größerem Maße. Bei diesen Messungen hat das IBM empfangsseitig mit einem Schallpegelmesser, Type EZGN, der Firma Rohde & Schwarz gearbeitet, in den Siemens & Halske-Terzbandpässe eingeschaltet waren. Die PTB benutzte ein Tauchspulmikrophon, Studioverstärker, Type V 1161, und Wandel und Goltermann-Terzbandpässe.

Abgesehen von diesen Abweichungen, die sich offensichtlich aus Unterschieden der Meßapparaturen verschiedener Institute ergeben, ist festzu-

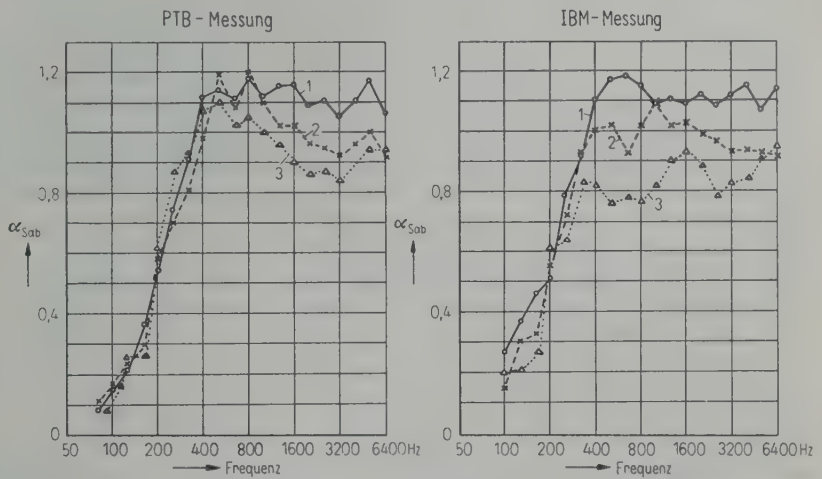


Abb. 8. Vergleich der α -Meßergebnisse von IBM und PTB in drei Hallräumen; Hallraum 1: 258 m³, Hallraum 2: 112 m³, Hallraum 3: 83 m³.

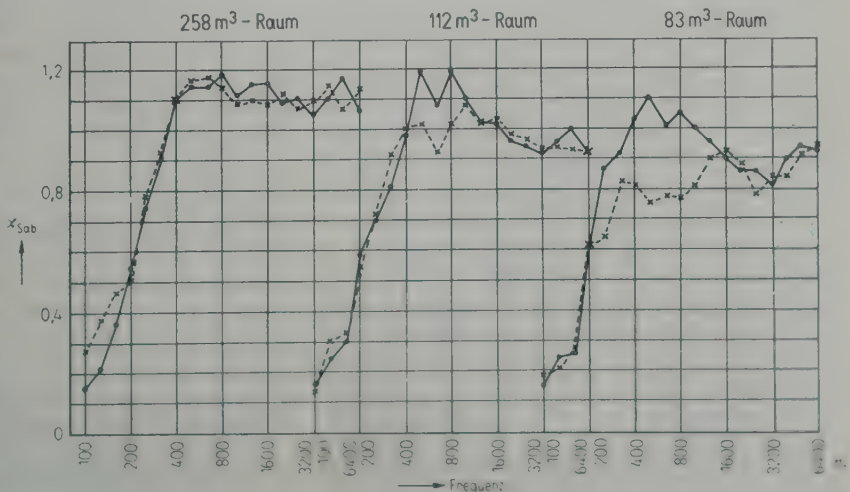


Abb. 9. Schallabsorptionsgrad von 5 cm Sillanplatten, gemessen in drei verschiedenen großen Hallräumen;
○ — ○ Messung der PTB, — — — × Messung des IBM.

stellen, daß bei dem genannten Prüfmaterial zumindest im Bereich von 1000 bis 3000 Hz vom Hallraum abhängige Unterschiede zwischen 1,1 und 0,8 bei der Absorptionsgradmessung auftreten, und zwar in dem Sinne, daß mit fallender Hallraumgröße der Absorptionsgrad geringer wird. Es muß noch untersucht werden, wie weit diese Differenzen auf die unterschiedliche Richtungsdifusität in den drei Räumen zurückzuführen sind oder ob sie nur auf den Unterschieden im Hallraumvolumen beruhen. Bedauerlicherweise, jedenfalls für diese Untersuchungen, hat der Raum 1 mit dem größten Volumen auch die größte Richtungsdifusität, nämlich zylindrische Flächen an drei Raumbegrenzungen, während Raum 2 dies nur an einer Wand aufweist und Raum 3 nur ebene Flächen besitzt. Die α -Kurven der PTB mit Prüfstoff-Anordnung in den Flächenmitten der Abb. 7 und 8 weichen etwas voneinander ab, da sie zwei getrennten Messungen entstammen, bei denen das gleiche Prüfmaterial jedesmal von neuem im Hallraum montiert worden war. Der Vergleich der entsprechenden α -Kurven der Abb. 7 und 8 liefert damit gleichzeitig auch die Größenordnung der Reproduzierbarkeit solcher Messungen im PTB-Hallraum.

Die Möglichkeit, die Unterschiede zwischen verschieden großen Hallräumen durch Variation der Prüfstoffflächen auszugleichen, ist in der amerikanischen Literatur diskutiert und dort als unzumutbar fallengelassen worden. Da bei gleicher Anordnung offenbar oberhalb einer gewissen Prüfstoffmenge keine Abnahme des Absorptionsgrades mit der Prüfstoffmenge mehr festzustellen ist, wäre ein solcher Ausgleich nur möglich, wenn die kleineren Räume mit extrem kleinen Prüfstoffflächen arbeiten würden. (Ver-

gleiche hierzu die α -Messungen an einem Lochresonator im Hallraum Nr. 1 mit Prüfstoffflächen von 11,8 und 19 m² in Abb. 10.) Wie schon bemerkt, dürfte die Abhängigkeit der gemessenen Schallabsorptionsgrade vom Hallraumvolumen bei weniger wirksamen Schallschluckstoffen geringer sein.

Daß weitere Untersuchungen in dieser Richtung dringend notwendig sind, braucht nicht besonders betont zu werden. Es muß jedenfalls angestrebt werden, daß die Untersuchungsergebnisse aus verschiedenen Hallräumen auf mindestens 5 % des Absorptionsgrades über den gesamten Frequenzbereich übereinstimmen. Bei welcher Hallraumgröße der „wahre“ Absorptionsgrad gemessen wird, hängt wohl davon ab, in welcher Flächenaufteilung und in was für Räumen der Schluckstoff nachher verwendet werden soll.

Da zweifellos die Richtungsdifusität im leeren Hallraum und im Hallraum mit Prüfstoff, insbesondere bei Stoffen mit α nahe 1, Unterschiede aufweisen dürfte, würden Untersuchungen mit der von E. MEYER und R. THIELE entwickelten Meßmethodik [14] vielleicht weitere wertvolle Erkenntnisse liefern.

Ich habe den Herren Prof. Dr. TH. KRISTEN und Dipl. Phys. H. W. MÜLLER vom Institut für Baustoffkunde und Materialprüfung der Technischen Hochschule Braunschweig dafür zu danken, daß mir die Hallräume ihres Institutes zur Verfügung standen und daß vom Institut Parallelmessungen am gleichen Material durchgeführt wurden, deren Ergebnisse ich verwerten durfte.

Gleichfalls danke ich Herrn Dr. KÖSTERS vom Nordwestdeutschen Rundfunk für sein förderndes Interesse an der Durchführung der Messungen in den Rundfunk-Hallräumen. Diese Messungen wurden während der Tätigkeit des Verfassers in der Abteilung Zentraltechnik des Nordwestdeutschen Rundfunks, Hamburg, vorgenommen.

(Eingegangen am 27. Juni 1955.)

Schrifttum

- [1] MORRIS, R. M., NIXON, G. M. und PARKINSON, J. S., Variations in sound absorption coefficients as obtained by the reverberation chamber method. J. acoust. Soc. Amer. **9** [1938], 234.
- [2] SABINE, P. E., Measurement of sound absorption coefficients from the viewpoint of the testing laboratory. J. acoust. Soc. Amer. **11** [1939], 41.
- [3] SABINE, H. J., A review of the absorption coefficient problem. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 387.
- [4] MEYER, E., Reverberation and absorption of sound. J. acoust. Soc. Amer. **8** [1937], 155.
- [5] SABINE, P. E., Specific normal impedances and sound absorption coefficients of materials. J. acoust. Soc. Amer. **12** [1941], 317.
- [6] MEYER, E. und SCHOCH, A., Schluckgrad-Vergleichsmessungen. Akust. Z. **4** [1939], 51.

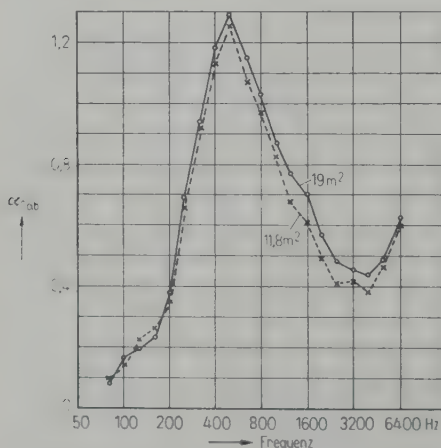


Abb. 10. Schallabsorptionsgrad eines Lochabsorbers, gemessen an 11,8 und an 19 m² Prüfstoff, Hallraum PTB.

- [7] EISENBERG, A., Schluckgrad-Vergleichsmessungen. *Acustica* **2** [1952], Beiheft 2, AB 108.
- [8] MORSE, P. M., BOLT, R. und BROWN, R., Acoustic impedance and sound absorption. *J. acoust. Soc. Amer.* **12** [1940], 217.
- [9] KURTZE, G. und LAUBER, A., Vergleichende Messungen der Schallabsorption von Schluckstoffen in Rohr und Hallraum. *Tech. Mitt. PTT (Bern)* **32** [1954], 249.
- [10] FESHBACH, H., On the perturbation of boundary conditions. *Phys. Rev.* **65** [1944], 307.
- [11] HUNT, F. V., BERANEK, L. L. und MAA, D. Y., Analysis of sound decay in rectangular rooms. *J. acoust. Soc. Amer.* **11** [1939], 80.
- [12] BOTSFORD, J. H., LANE, R. N. und WATSON, R. B., A reverberation chamber with polycylindrical walls. *J. acoust. Soc. Amer.* **24** [1952], 742.
- [13] MAA, D. Y., Non-uniform acoustical boundaries in rectangular rooms. *J. acoust. Soc. Amer.* **12** [1940], 39.
- [14] THIELE, R., Richtungsverteilung und Zeitfolge der Schallrückwürfe in Räumen. *Acustica* **3** [1953], 291.

AN IMPEDANCE MEASURING SET FOR ELECTRICAL, ACOUSTICAL AND MECHANICAL IMPEDANCES

by E. W. AYERS, E. ASPINALL and J. Y. MORTON

Post Office Research Station, Dollis Hill, London

Summary

An impedance to be measured is compared with a reference impedance of similar nature by connecting each in turn to a source of adjustable strength. If the internal impedance of the source is constant, the vector ratio of the unknown and reference is the ratio of the changes in stimulus required to restore the source to short-circuit conditions, or the reciprocal of this ratio if the source is restored to open-circuit conditions.

Sommaire

L'impédance à mesurer est comparée avec une impédance de référence de même nature, en reliant chacune de ces impédances à tour de rôle à une source ayant une intensité réglable. Si l'impédance interne de la source est constante, le rapport vectoriel des impédances inconnue et de référence est le rapport des variations de stimulus nécessaires pour rétablir la source dans les conditions de court-circuit; c'est l'inverse de ce rapport si la source est rétablie dans les conditions en circuit ouvert.

Zusammenfassung

Die zu messende Impedanz wird mit einer Bezugsimpedanz verglichen, indem man beide wechselweise an eine Quelle mit veränderlicher Leistung anschließt. Wenn der Innenwiderstand der Quelle konstant ist, ergibt sich das komplexe Verhältnis der unbekannten zur Bezugsimpedanz aus dem Verhältnis der Anregungsänderungen, die nötig sind, um für die Quelle die Kurzschlußverhältnisse wiederherzustellen, bzw. aus dem Reziproken dieses Verhältnisses bei Wiederherstellung der Leerlaufbedingung.

1. Introduction

The equipment shown in Fig. 1 is a versatile measuring instrument for electrical, acoustical and mechanical impedances, which gives the vector components of the unknown impedance by comparison with any convenient known impedance. It has been used mainly on measurements of the load impedances presented by human subjects to air—and bone—conduction receivers, as a step towards the design of an artificial ear and mastoid. A frequency range of 200 to 5000 c/s is covered, but the principle of operation can be applied to wider ranges, and to impedances of other types.

2. Measurement of electrical impedances

Though not of great practical importance, save as a means of checking the common electrical

circuits, two ways of measuring electrical impedance with this equipment conveniently show the basic principles. The two methods are referred to as "constant-voltage" and "constant-current". An adaptation of the former is used for acoustical, and of the latter for mechanical measurements.

In Fig. 2 a generator of e. m. f. E_0 and internal impedance Z_0 has a pair of output terminals to which various impedances may be connected, and between which a potential difference V exists. If the terminals are open-circuited the potential difference is V_0 and equal to E_0 (Fig. 2a). If now an unknown impedance Z_x is connected to the terminals the voltage changes, but may be restored to its original value V_0 , in magnitude and phase by adding to the generator e. m. f. some amount E_1 , as shown in Fig. 2b. Similarly for a known impedance Z_k (Fig. 2c)

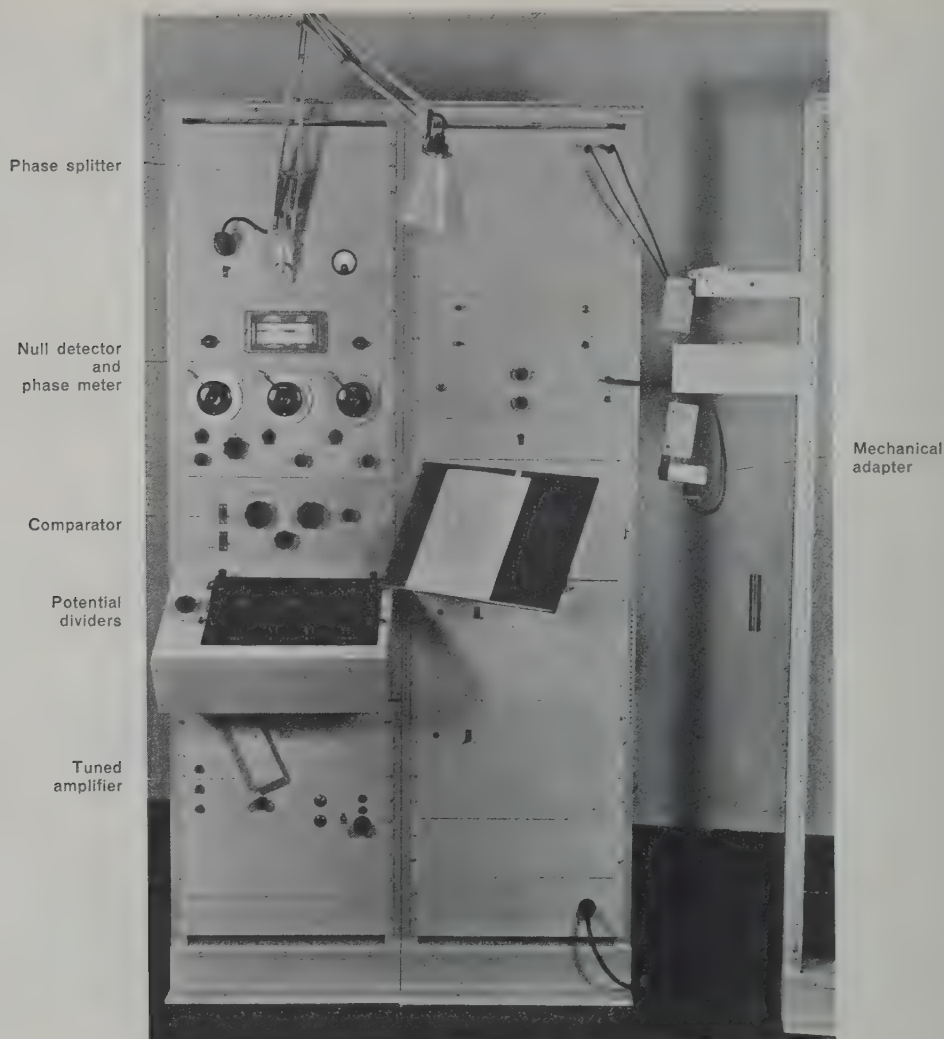


Fig. 1. Impedance measuring set and mechanical adapter.

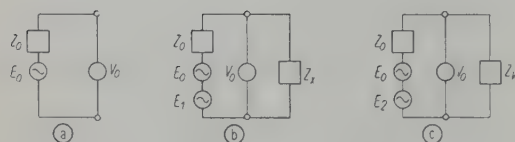


Fig. 2. Constant voltage circuit.

a corresponding e. m. f. E_2 may be found. Solution of the three simple equations for the three parts of Fig. 2 gives

$$Z_x = Z_k \cdot E_2/E_1. \quad (1)$$

In Fig. 3a the terminal current delivered by the generator is $I_0 = E_0/Z_0$ when the terminals are short-circuited. If impedances Z_x and Z_k are inserted, as in Fig. 3b and c the current changes, but may be restored to I_0 , in magnitude

and phase, by injecting e. m. f.'s E_1 and E_2 . Solution of the equations gives

$$Z_x = Z_k \cdot E_1/E_2. \quad (2)$$

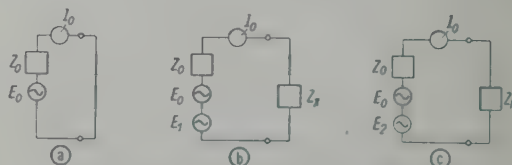


Fig. 3. Constant current circuit.

Z_0 and E_0 are assumed to remain constant during the three stages of a measurement, and it is then unnecessary to know their values, or those of V_0 or I_0 . If Z_0 is known, Z_x may be

deduced without recourse to Z_k , but in the acoustical and mechanical cases it is far more convenient to separate the functions of source and standard, and to use equations [1] and [2]. For greatest sensitivity the added e. m. f.'s E_1 and E_2 should be large compared with E_0 . This implies that in Fig. 2 Z_0 should be much greater than Z_x or Z_k , and in Fig. 3 it should be much less. These conditions also minimise errors due to changes in Z_0 or E_0 during a measurement, and are of course applicable to the acoustical and mechanical analogues.

3. Measurement of acoustical impedance

In Fig. 4a the generator of Fig. 2a is replaced by a sound source of internal impedance aZ_0 referred to the measuring plane, which corresponds with the output terminals. The terminal

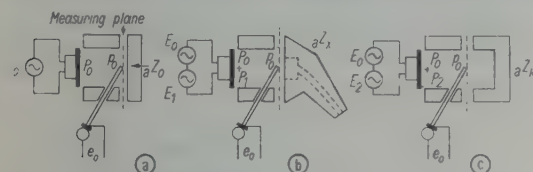


Fig. 4. Acoustical analogue of Fig. 2.

p. d. is represented by the sound pressure p_0 at this plane, and the generator e. m. f. is represented by P_0 , the value of p_0 when the measuring plane is shut off by a rigid wall. If an unknown acoustical impedance aZ_x is substituted for this wall, Fig. 4b, the sound pressure will change from the blocked value p_0 , but may be restored to this value, in magnitude and phase, by changing the input from the source. The change in input may be specified by the resultant increase P_1 in sound pressure which would be observed with the aperture in the measuring plane blocked. Clearly P_1 is the analogue of E_1 in Fig. 2b. Similarly if a known impedance aZ_k is presented at the measuring plane, Fig. 4c, a sound pressure P_2 may be found which is the analogue of E_2 in Fig. 2c. By analogy with the electrical circuits:

$$aZ_x = aZ_k \cdot \dot{P}_2 / P_1. \quad (3)$$

An uncalibrated linear electroacoustical transducer may be employed as a sound source, and the sound pressure changes P_1 and P_2 replaced by the changes E_1 and E_2 in electrical excitation needed to cause them. Then:

$$aZ_x = aZ_k \cdot E_2 / E_1. \quad (4)$$

The pressure p_0 , which must be held constant, may be monitored by the electrical output e_0

of a probe microphone, which need not even be linear provided it is phasesensitive and free from hysteresis. Its source impedance forms part of aZ_0 and does not appear in the equation.

4. Measurement of mechanical impedance

Fig. 5 represents the mechanical analogue of Fig. 3. If the measuring surface is free a "short circuit" velocity v_0 is developed, with the source dissipating the force F_0 wholly against the internal impedance mZ_0 . The measuring surface

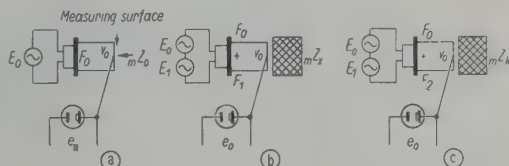


Fig. 5. Mechanical analogue of Fig. 3.

velocity corresponds with I_0 in Fig. 3, and must be restored to v_0 when it is disturbed by attaching impedances mZ_x , mZ_k . If this is achieved by changes F_1 and F_2 in the blocked force developed by the source

$$mZ_x = mZ_k \cdot F_1 / F_2. \quad (5)$$

An uncalibrated linear electromechanical transducer may be employed as the mechanical source and the changes F_1 , F_2 in blocked force replaced by the changes E_1 , E_2 in electrical excitation. Then:

$$mZ_x = mZ_k \cdot E_1 / E_2. \quad (6)$$

The velocity v_0 may be monitored electrically by another transducer, the requirements for which are no more severe than in the preceding section. With simple harmonic excitation, an acceleration-sensitive piezo-electric element has in fact been used.

5. Common electrical equipment

Linear transducers allow all impedance comparisons to be made in terms of electrical quantities. Common electrical equipment shown in Fig. 6 provides a suitable basic excitation E_0 for the source transducer, and means for combining with it either of the two auxiliary excitations E_1 , E_2 . The latter are continuously adjustable in magnitude and phase relative to E_0 . The impedance of the source feeding the transducer must be the same whether E_0 only, $E_0 + E_1$ or $E_0 + E_2$ are connected. A voltmeter across the source gives an indication when the overload point of the transducer has been reached.

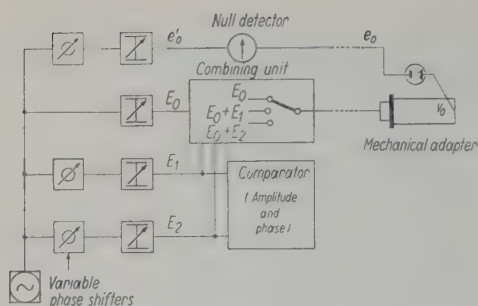


Fig. 6. Common electrical circuit and mechanical adapter.

The output e_0 of the monitoring transducer is backed off by e'_0 derived from a fourth continuously variable channel, so that the null detector reads zero in the first condition of the measuring circuit analogue (open- or short-circuited, as required). Departure of e_0 in magnitude or phase from this initial value then results in a deflection on the detector, the restoration of which to zero indicates when correct adjustments for E_1 or E_2 have been found.

The attenuators and phase shifters in the E_1 , E_2 channels are calibrated, so that the ratio of Z_x and Z_k may be found approximately from their settings. For greater accuracy the voltages set up on these channels at the end of a measurement are applied to the comparator shown in Fig. 6. They are attenuated by two separate decade potential dividers and applied in turn to a voltmeter, Fig. 7. (The same instrument, with associated tuned amplifier and calibrated attenuator is used for the null detector.) One divider is set to a reading which represents the magnitude of the known impedance $|Z_k|$ in suitable units, and the other divider is adjusted to give an equal output. The reading of the second divider then represents the magnitude of the unknown impedance $|Z_x|$ in the same units. By interchanging the rôles of the two dividers, direct readings in terms of admittance can be obtained. The voltmeter is adjusted to a standard scale mark on either of the two signals E'_1 or E'_2 and their vector sum or difference is

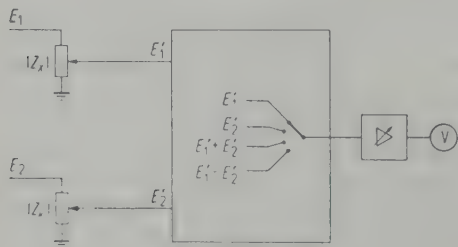


Fig. 7. Comparator.

then applied to it. A suitable scale calibration gives the difference in phase angles between Z_x and Z_k . If, as is usually convenient, the known impedance is a substantially pure reactance with a phase angle of $\pm 90^\circ$, the scale may be calibrated directly in terms of the phase angle of Z_x .

The phase shifters for the E_1 , E_2 and e'_0 channels are Magslip resolvers. The two phase stator windings are fed from a phase splitter which consists of two all-pass L - C networks whose insertion phase shifts differ by $90 \pm 1^\circ$ between 200 and 5000 c/s, and the E_0 channel is fed from one of them. As the rotor of a Magslip is turned through one revolution the e. m. f. induced in it changes in phase by 360° with respect to E_0 . Slow motion dials have been fitted to the phase shifters to permit fine discrimination, but the relationship between angular rotation and phase shift is frequency dependent and quadrantal in nature; it changes within $\pm 5^\circ$ between 200 and 5000 c/s.

6. Equipment for acoustical measurements

Fig. 8 shows an acoustical adapter, consisting of a source transducer, measuring cavity, and probe microphone, with a selection of reference impedances and a coupler used when measuring impedances whose cross-section is larger than that of the cavity. A moving coil unit provides the linearity demanded of the source, with stable sensitivity and phase shift. It is coupled to the measuring cavity (Fig. 9) by an annular slit to distribute the sound pressure uniformly over the measuring plane [1]. The cavity reactance may be tuned to give high impedance at one frequency, but it increases the complexity of the measurement and the pressure distribution is liable to be disturbed. A high resistance source impedance can be obtained which gives greater uniformity of pressure than the annular slit, but source power must be increased to offset the power dissipated in it and this increases unwanted electrical and mechanical pick-up. The impedance of the probe microphone varies between 6 and 60 times the source impedance of which it forms a part.

The pressure distribution in the cavity cannot be exactly uniform, so it is the average value across the measuring plane which should be monitored. The effective position of the probe microphone tip lies within the cavity, 0.4 mm from the measuring plane, and on its centre line; the part of the cavity beyond the probe is measured with the impedance. Errors arise if

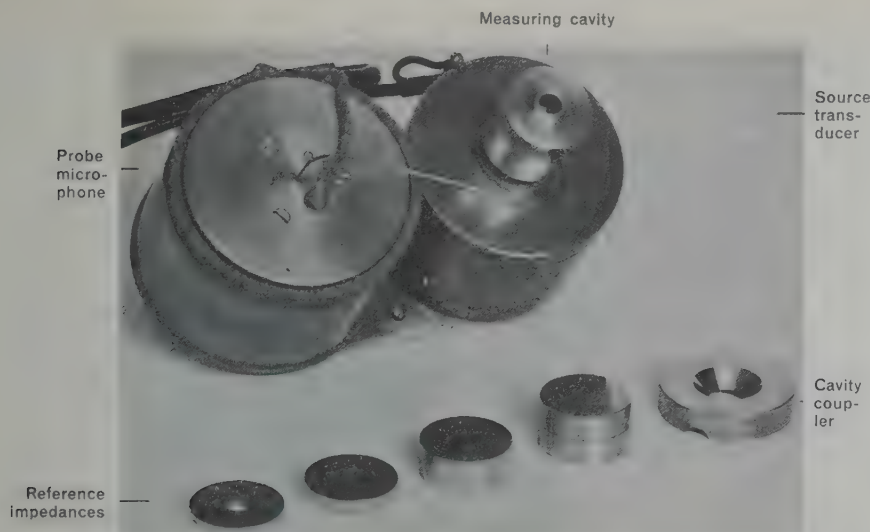


Fig. 8. Acoustical adapter, reference impedances and cavity coupler.

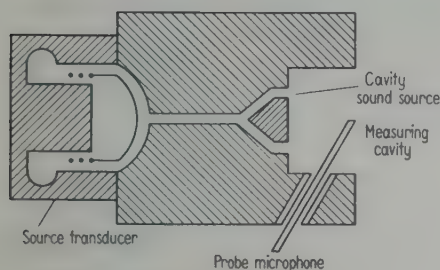


Fig. 9. Acoustical adapter.

the pressure distribution is different at different stages of the measurement, as when the unknown impedance has a different cross-section from the cavity. The best solution in this case is a new measuring cavity, but a conical cavity coupler (Fig. 8) may be used with some loss in accuracy. Errors may be estimated by comparing known impedances on the coupler, and will tend to be greatest when comparing reactances of opposite sign. Unless the tip of the probe is moved out to the new measuring plane the coupler volume is included in any impedance placed on the coupler.

The measurement of inert impedances occupies only a few seconds, but for work on human subjects such as measuring ear-impedances a considerable amount of time may be required to position the subject correctly. The time which can be taken over such a measurement is limited to about 15 minutes for best accuracy due mainly to changes in transducer sensitivities with ambient temperature and electrical contact instability in the channel attenuators. The probe

tube shown in Fig. 8 is normally encased in thermal insulation.

Reference impedances take the form of tubes, equal in diameter to the measuring cavity (0.63 cm) and closed at one end. Those shown in Fig. 8 are three of a set of seven ranging in length from 0.25 to 16 cm by factors of 2; when in use they are terminated by the brass blank shown adjacent to them. The input impedance of a closed tube can be shown to be $Z_0 \coth \eta l$, where Z_0 is the characteristic impedance of the tube, η is the propagation coefficient and l is the length of the tube. In practical applications the imaginary part of Z_0 and the real part of η are small, hence the closed tube impedance is approximately

$$-j \frac{\rho c}{S} \left(1 + \frac{0.17}{r \sqrt{f}} \right) \cot \frac{\omega}{c} l, \quad (7)$$

where all units are c. g. s. and

ρ is the density of air at the ambient temperature and pressure,

c' is the velocity of sound in the tube

$$\approx c \left(1 - \frac{0.17}{r \sqrt{f}} \right),$$

c is the velocity of sound in free air

$$\approx 33,133 + 61 T,$$

T is the temperature in degrees centigrade,

r is the tube radius,

f is the frequency of the sound signal,

S is the cross-sectional area of the tube,

ω is the angular frequency of sound signal.

For convenience the reference impedances have been calibrated for dry air at 18 °C and

760 mm Hg. If tube lengths are restricted to less than one eighth of a wavelength, the worst error introduced by using equation [7] instead of $Z_0 \coth \eta l$ is less than 0.1% in modulus and 40 minutes in angle, and the impedance changes due to normal changes in atmospheric conditions are less than 1%. During the working period of five months ending the 31st December 1953, the maximum correction in modulus for pressure was -3%, for relative humidity less than +0.5% and for temperature a negligible amount.

7. Equipment for mechanical measurements

A mechanical adapter used for human mastoid impedance measurements is shown in Fig. 10. The source transducer is an inertia reaction drive unit, as used in bone-conduction receivers, selected for linearity and its armature is attached to a tubular member which terminates in the measuring surface. The monitoring transducer is a square Rochelle salt bimorph element housed in the tube and attached by two opposite corners just behind the measuring surface, the other two corners being free. The tube and measuring surface are made from material giving good thermal insulation to prevent heat from the operator's hands and the subject's mastoid affecting the monitoring transducer. A male screw thread at the end of the tube facilitates the firm attachment of reference masses. It is essential that the impedance of this connection is high compared with that of the applied mass. The frequency range over which mZ_0 at the measuring surface is adequately low may be controlled by changing the compliance of the armature suspension. Two such broadly tuned adapters sufficed for human mastoid measurements between 400 and 4000 c/s, and the reference masses ranged from 0.5 to 32 g.

In these measurements the unknown impedance could not be firmly attached to the adapter, and the measuring surface had to be held against the mastoid with a steady force to simulate

working conditions. This force was not required in the initial and final stages of a measurement (Fig. 5), so it was necessary to devise some means of applying it without materially altering the mechanical source impedance mZ_0 . The method adopted was to encircle the assembly by a clamp lined with a thick layer of very compliant sponge rubber or aerated plastic. These materials were found to be capable of transmitting the desired steady force (some 440 g wt) in shear, with negligible change in mZ_0 . Other devices tried for applying the steady force introduced a large additional mass component into the source impedance, which necessitated tuning to give the required sensitivity and so restricted the useful frequency band of the adapter; they demanded a high stability in the frequency of the driving signal. To ensure pure rectilinear motion, the whole unit must be symmetrical about the transducer-measuring surface axis, and the measuring surface must be carefully applied to the surface under test. The clamp supporting the assembly was attached to the end of a swinging arm, pivoted at its balance point, with a cord running over a pulley to a weight to give the steady force (Fig. 1).

8. Accuracy

The accuracy obtainable in practice depends on the adapter and reference impedance designs and the stability of the transducers and electrical circuitry. With the acoustical and mechanical adapters described, errors in comparison between impedances of the same order of magnitude using the range of reference impedances, and also comparing calculable acoustical masses and compliances, were less than $\pm 1\%$ between 200 and 5000 c/s; readings could be repeated from day to day within 0.3%.

Acknowledgements

The authors are indebted to Mr. E. R. WIGAN formerly with the British Signals Research and Development Establishment whose acoustic impedance comparator demonstrated at the Physical Society's Exhibition in 1949 forms the basis from which this measuring set was developed. Acknowledgement is also made to the Engineer-in-Chief of the General Post Office for permission to publish this paper, and to the authors' colleagues who carried out construction and experimental work.

(Received May 20th, 1955.)

Reference

- [1] MAWARDI, O. K., Measurement of acoustic impedance. J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 86.

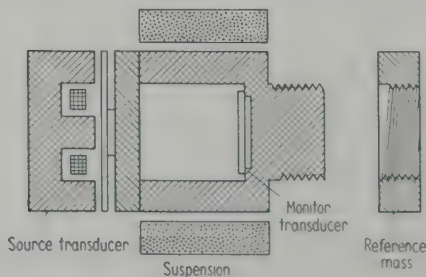


Fig. 10. Mechanical adapter.

ZUR BRAGGSCHEN REFLEXION VON LICHT AN ULTRASCHALLWELLEN

von E. H. WAGNER*

Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Karlsruhe

Zusammenfassung

Bei der Beugung von parallelem Licht an Ultraschallwellen können stets selektive Beugungserscheinungen unter den BRAGGSchen Winkeln auftreten, sofern man hinreichend hohe Beugungsordnungen bei hinreichend großen Schallfeldtiefen beobachtet. Die einzuhaltenden Bedingungen werden im einzelnen ermittelt, die Intensität der BRAGGSchen Reflexionen wird berechnet. WILLARDs Experimente über diesen Gegenstand stützen die erhaltenen Resultate; seine Kriterien für das Auftreten BRAGGScher Reflexion müssen dagegen für zweite und höhere Beugungsordnungen modifiziert werden.

Summary

When parallel light is reflected by ultrasonic waves, selective diffraction phenomena can occur at the BRAGG angles of incidence, provided fairly high orders and depths of sound field are examined. The corresponding relationships are given and the intensity of the BRAGG reflection calculated. WILLARD's experiments support the results obtained, but his criteria for the appearance of BRAGG reflections must be modified for second and higher orders diffractions.

Sommaire

On peut toujours observer une diffraction sélective par des ultrasons sous les angles de BRAGG, d'un faisceau de lumière parallèle si la profondeur du champ sonore est suffisante et si l'observation porte sur les ordres de diffraction suffisamment élevés. On établit les conditions à satisfaire à ce sujet, et on calcule l'intensité des réflexions de BRAGG. Les expériences de WILLARD confirment les résultats obtenus; toutefois, il faut modifier les critères qu'il a établis pour l'apparition de la réflexion de BRAGG, dans le cas du second ordre et des ordres plus élevés de réflexion.

1. Einleitung

Man findet Beugungserscheinungen von ganz verschiedenem Charakter, wenn man ein paralleles Lichtbündel auf eine in einer Flüssigkeit laufende Ultraschallwelle fallen läßt. Die entstehenden Beugungsspektren können einerseits Beugungsordnungen enthalten, die relativ unempfindlich gegen Variation des Einfallswinkels sind („normale“ Beugung im Sinne der RAMAN-NATHSchen Theorie [1]) — solche Ordnungen bleiben dann auch bei senkrechtem Einfall des Primärbündels sichtbar. Bei schiefeinfall andererseits beobachtet man Beugungsordnungen, die selektiv und ausschließlich in unmittelbarer Umgebung der BRAGGSchen Winkel auftreten („BRAGGSche“ Beugung).

Diese beiden Grenzfälle sind besonders eindrucksvoll und wurden schon vielfach experimentell und theoretisch untersucht. BERGMANN [2] hat diese Untersuchungen zusammenfassend und so vollständig dargestellt, daß wir auf Einzelheiten nicht einzugehen brauchen.

Nur sehr unvollständig konnten jedoch bisher aus der Theorie die Voraussetzungen entnommen

werden, unter denen die verschiedenen Beugungstypen experimentell beobachtet werden können. Das ist insbesondere auch das Resultat der WILLARDschen Arbeit [3], in der die Bedingungen für das Auftreten BRAGGScher Beugung vor allem experimentell sehr sorgfältig untersucht wurden¹.

Da die früheren Theorien nur für die erwähnten Grenzfälle durchgerechnet sind, läßt sich der Existenzbereich der einzelnen Beugungstypen allenfalls aus den Gültigkeitsgrenzen der einzelnen Theorien abschätzen. Die letzteren können kaum genau angegeben werden, außerdem findet man in Wirklichkeit einen allmählichen Übergang vom „normalen“ zum „BRAGGSchen“ Beugungstyp; solche Abschätzungen sind daher wenig zuverlässig.

Ohne Schwierigkeiten prinzipieller Art läßt sich der Existenzbereich der verschiedenen Beugungstypen jedoch aus einer einheitlichen Theorie ableiten, die alle bisher durchgeführten Beugungsexperimente mit parallelem Licht beschreiben kann. Zu einer solchen gelangt man, wenn man die Lichtbeugung an laufenden Ultraschall-

* Zur Zeit University of Liverpool, Department of Theoretical Physics.

¹ WILLARD schließt mit der Feststellung: „A general, basic and inclusive theory of ultrasonic light diffraction is yet to be developed“.

wellen als Randwertproblem der MAXWELLSchen Gleichungen auffaßt [4]; daß für die Durchrechnung dieser Theorie nur physikalisch bedeutungslose Voraussetzungen erforderlich sind² ($c'/c \approx 0,5 \cdot 10^{-5} \ll 1$ und $\Delta n/n_0 \approx 10^{-4} \dots 10^{-5} \ll 1$), hat der Verfasser ebenfalls a. a. O. gezeigt [5]. Die in [5] abgeleitete, geschlossene Intensitätsformel gilt zwar für beliebige Wellenlängenverhältnisse a/λ_0 , Schallfeldtiefen D , Einfallswinkel ϑ_0 und für alle Beugungstypen, ist jedoch gerade wegen dieser großen Allgemeinheit noch etwas unhandlich. Wir wollen sie hier auf den BRAGGSchen Beugungstyp (genauer: den einfach-BRAGGSchen Beugungstyp) spezialisieren und erhalten dadurch in einfacher Form die Voraussetzungen, unter denen dieser Beugungstyp beobachtet werden kann.

Unser Resultat wird durch die WILLARDSchen Experimente [3] sehr gut bestätigt. Die von WILLARD angegebenen Kriterien für das Auftreten BRAGGScher Beugung sind dagegen praktisch nur für die erste Ordnung brauchbar.

2. Uebersicht über die möglichen Beugungstypen

Wir stellen uns vor, daß ein paralleles Lichtbündel unter dem Einfallswinkel ϑ_0 auf die von parallelen Küvettenwänden begrenzte Flüssigkeit auffällt. Durch laufende Schallwellen wird der Brechungsindex der Flüssigkeit gemäß³

$$n(x, t) = n_0 + \Delta n \cos(bx - \omega t) \quad (1)$$

zeitlich und räumlich periodisch moduliert (zur Wahl dieses Modells vgl. [4]). Wir interessieren uns für die Intensität I_ν des abgelenkten Bündels ν -ter Ordnung, das auf der Rückseite der Küvette unter dem Beugungswinkel ϑ_ν austritt (Abb. 1). ϑ_ν darf mit der elementaren Strichgitterformel

$$\sin \vartheta_\nu = \sin \vartheta_0 + \nu \lambda_0/a \quad (2)$$

aus dem Einfallswinkel berechnet werden.

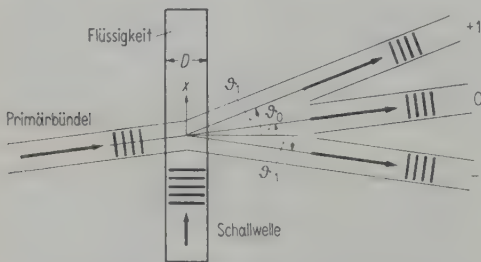


Abb. 1. Beugung eines parallelen Bündels bei schiefem Einfall. Der Übersichtlichkeit halber sind nur zwei abgelenkte Bündel eingezeichnet.

² Eine Liste aller im Text nicht erklärten Symbole findet sich am Schluß der Arbeit.

³ Das Argument irgend einer Funktion schreiben wir, sofern seine Angabe nötig, stets in eckigen Klammern „ $\langle \rangle$ “.

Merkliche Werte kann die Beugungsintensität I_ν nur für einen Bereich von Einfallswinkeln annehmen, der allein durch ν und den Zahlenwert des dimensionslosen Parameters

$$s = 16 (n_0 a/\lambda_0)^2 \Delta n/n_0 \quad (3)$$

bestimmt und unabhängig von der Schallfeldtiefe D ist (vgl. [5]). Zur Veranschaulichung dient Abb. 2, wo wir derartige Bereiche über ν und⁴

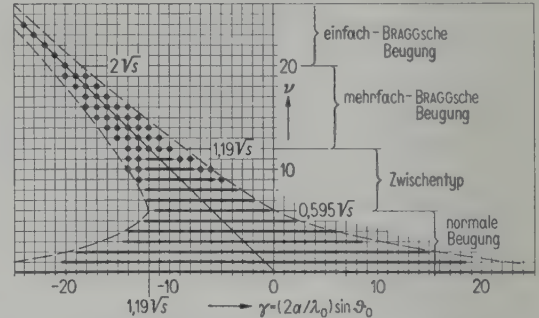


Abb. 2. Beugungstypen: Bereiche mit merklicher Intensität der Beugungsordnungen ν .

$$\gamma = (2a/\lambda_0) \sin \vartheta_0 \quad (4)$$

für $s = 100$ je nach ihrer Größe durch fette Striche bzw. Punkte markiert haben. Der Fall $s \gg 1$ ist deshalb als Beispiel besonders instruktiv, weil er die größtmögliche Vielfalt von sehr scharf ausgeprägten Beugungstypen liefert. Für negative ν ist Abb. 2 einfach am Nullpunkt zu spiegeln, da die Beugungsintensität entgegengesetzter Ordnungen symmetrisch zu $\gamma = 0$ verläuft, es gilt

$$I_\nu \langle \gamma \rangle = I_{-\nu} \langle -\gamma \rangle. \quad (5)$$

Im einzelnen erkennt man in Abb. 2 die folgenden Beugungstypen:

a) Normaler Beugungstyp, $\nu < 0,595 \sqrt{s}$

Die Beugungsintensität variiert nur sehr langsam mit dem Einfallswinkel in einem breiten Winkelbereich, der senkrechten Einfall einschließt.

b) Zwischentyp, $0,595 \sqrt{s} < \nu < 1,19 \sqrt{s}$

Aus einer langsam variablen Untergrundintensität gemäß a) können sich einzelne,

⁴ Die strenge Rechnung [5] zeigt, daß die Beugungsspektren gegen die Spektren eines ruhenden Gitters durch das Fortschreiten der Schallwellen ein wenig verschoben werden; sie liefert $\gamma = (2a/\lambda_0) \sin \vartheta_0 - 2c'n_0^2 a/c\lambda_0$. Auch bei BRAGGScher Reflexion, die für $\gamma = -\nu$ eintritt, verlaufen Primär- und Sekundärstrahlen am Schallwellengitter nicht mehr genau symmetrisch zu den Schallwellenfronten. Da der „relativistische“ Korrekturterm $2c'n_0^2 a/c\lambda_0$ im Winkelmaß allenfalls etwa 3 Winkelsekunden ausmacht und experimentell sicher nicht mehr nachweisbar ist, darf man hier und im folgenden unbedenklich die Näherung (4) verwenden.

selektive Maxima bei ganzzahligem γ herausheben (vgl. c); beide Erscheinungen sind nicht sehr ausgeprägt. Dieser Beugungstyp tritt zwar noch in einem relativ breiten Winkelbereich, aber nicht mehr bei senkrechtem Einfall auf.

Für $\nu > 1,19\sqrt{s}$ erhält man *selektive Beugungserscheinungen*: Der

c) *mehrfach-BRAGGSche Beugungstyp*, $1,19\sqrt{s} < \nu < 2\sqrt{s}$ zeigt im allgemeinen mehrere selektive Maxima, die schmal gegen den Abstand benachbarter BRAGG-Richtungen ($\Delta\gamma = 1$) sind (nur solche Maxima sollen als selektiv bezeichnet werden). Sie treten stets für ganzzahlige $\gamma = -\nu, -(\nu + 1), -(\nu - 1), \dots$, d. h. nicht nur für die ν -te, sondern auch für die $(\nu - 1)$ -te, $(\nu + 1)$ -te usw. BRAGG-Richtung bei der ν -ten Beugungsordnung auf.

d) *einfach-BRAGGScher Beugungstyp*, $\nu > 2\sqrt{s}$
Die ν -te Beugungsordnung enthält nur ein selektives Maximum beim BRAGGSchen Winkel ν -ter Ordnung, dessen Entstehung anschaulich als „Spiegelung“ des einfallenden Bündels an den Schallwellenfronten beschrieben werden darf.

Das Zustandekommen des zunächst vielleicht überraschenden Beugungstyps c) ist anschaulich ebenfalls leicht zu verstehen, wenn man die BRILLOUINSche Vorstellung der „Mehrfachbeugung“ [6] mit der BRAGGSchen Spiegelungsvorstellung kombiniert. Man erkennt aus Abb. 2, daß die selektiven Maxima der ν -ten Ordnung an der Stelle $\gamma = -(\nu + 1)$ bzw. $\gamma = -(\nu - 1)$ usw. bei denselben γ -Werten verschwinden wie die +1. bzw. -1. Ordnung ($\gamma = -20$ bzw. -18 in Abb. 2) usw. Strahlt man z. B. bei $s = 100$ (Abb. 2) mit $\gamma = -\nu = -20$ ein, so entsteht aus dem Primärbündel unmittelbar durch „normale“ Beugung (d. h. nicht selektiv) die +1. Ordnung mit der Beugungsrichtung (vgl. Gl. (2))

$$(2a/\lambda_0) \sin \vartheta_1 = \gamma + 2 = -(\nu - 2),$$

und durch BRAGGSche Reflexion (d. h. selektiv)

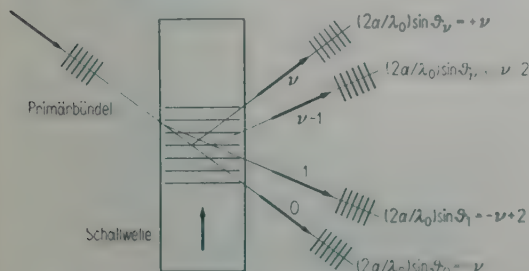


Abb. 3. Entstehung des mehrfach-BRAGGSchen Beugungstyps durch Mehrfachbeugung und BRAGGSche Reflexion (schematisch).

die ν -te Ordnung mit der Beugungsrichtung

$$(2a/\lambda_0) \sin \vartheta_\nu = \gamma + 2 \nu = +\nu.$$

Faßt man nun im Sinne der Mehrfachbeugung die Beugungsrichtung der +1. Ordnung als Primärrichtung auf, so trifft diese die Schallwellenfronten gerade unter dem BRAGGSchen Winkel $(\nu - 2)$ -ter Ordnung; sie wird daher selektiv in die Richtung

$$(2a/\lambda_0) \sin \vartheta_1 + 2(\nu - 2)$$

$$\text{oder} \quad \gamma + 2 + 2(\nu - 2) = \nu - 2$$

„gespiegelt“. Nach der Interferenzbedingung (2) ist aber

$$(2a/\lambda_0) \sin \vartheta_{\nu-1} = \gamma + 2(\nu - 1) = \nu - 2$$

gerade die Beugungsrichtung der $(\nu - 1)$ -ten Ordnung. Es entsteht also auf diese Weise ein selektives Maximum in der Beugungsrichtung der $(\nu - 1)$ -ten Ordnung für die Einstrahlrichtung $\gamma = -\nu$ (Abb. 3); solche Maxima kennzeichnen aber gerade den oben beschriebenen, mehrfach-BRAGGSchen Beugungstyp. In ganz analoger Weise können alle Maxima dieses Beugungstyps erklärt werden, nur muß man gegebenenfalls auch die $-1, +2, \dots$ Ordnung als Primärrichtung auffassen.

Der Beugungstyp der einzelnen Ordnungen wird also durch die Form der in Abb. 2 gezeichneten Bereiche bestimmt. Die Schallfeldtiefe D hat zwar auf diese Form keinen Einfluß, bestimmt aber den genaueren Verlauf der Beugungsintensität innerhalb der gezeichneten Bereiche. Auch bei „normaler“ Beugung treten Maxima und Minima von I_ν auf, die aber im allgemeinen breit gegen $\Delta\gamma = 1$ sind; man findet z. B. im BRAGGSchen Winkel stets ein Extremum von I_ν , da I_ν für alle Beugungstypen symmetrisch zur BRAGG-Richtung ν -ter Ordnung verläuft:

$$I_\nu(\gamma; \nu) = I_\nu(-(\gamma + \nu)). \quad (6)$$

Ebenso können von den selektiven Maxima des mehrfach-BRAGGSchen Beugungstyps einzelne bei entsprechender Schallfeldtiefe ausgelöscht werden.

Wenn man die Verhältnisse bei anderen s -Werten studieren will, hat man die der Abb. 2 entsprechende Figur nach dem in [5] angegebenen Verfahren für den betreffenden s -Wert zu zeichnen. Im wesentlichen wird dadurch die gestrichelt gezeichnete Hüllkurve der Abb. 2 proportional \sqrt{s} ähnlich verkleinert oder vergrößert. Für $s > 100$ bringt das nichts prinzipiell Neues; für $s < 100$ dagegen rücken die verschiedenen Beugungstypen immer mehr zusammen. Etwa bei

$s = 25$ verschwindet zunächst der mehrfach-BRAGGSche Beugungstyp, so daß schon für $\nu > 1,19 \sqrt{s}$ einfach-BRAGGSche Beugung auftritt. Bei noch kleinerem s fließt der Zwischentyp mit dem einfach-BRAGGSchen Typ zusammen, der letztere bleibt schließlich für $s \lesssim 1$ allein übrig. Dann haben auch die angegebenen \sqrt{s} -Kriterien zur Abgrenzung der einzelnen Beugungstypen keine Bedeutung mehr.

Der einfach-BRAGGSche Beugungstyp, auf den wir uns von nun ab beschränken wollen, tritt also bei folgenden Ordnungen auf:

$$\begin{aligned} &\text{für } s \lesssim 1 \quad \text{bei } \nu = 1, 2, \dots, \\ &\text{für } s < 25 \quad \text{bei } \nu > 1,19 \sqrt{s}, \\ &\text{für } s > 25 \quad \text{bei } \nu > 2 \sqrt{s}. \end{aligned} \quad (7)$$

Diese Bedingungen sind aber nicht hinreichend, um die Beobachtbarkeit der ν -ten Beugungsordnung zu garantieren. Hierfür ist noch eine zusätzliche Forderung über die Schallfeldtiefe notwendig, die wir im 4. Abschnitt ableiten wollen: Schon jetzt ist unmittelbar klar, daß bei zu geringer Schallfeldtiefe keine merkliche Intensität in die ν -te Ordnung umgesteuert werden kann.

3. Intensitätsformel für die einfach-BRAGGSche Beugung

Allgemein läßt sich die Beugungsintensität der ν -ten Ordnung durch den folgenden Ausdruck beschreiben [5]:

$$I_\nu = |b_\nu^P|^2 \quad (8a)$$

$$b_\nu^P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g m_n \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_n^* \langle \gamma \rangle}{\left[\frac{1}{2} (1 + \hat{l}_0/\hat{l}_\nu) \cos \hat{l}_n D - \frac{1}{2} i (\varrho_0 \hat{l}_n/\hat{l}_\nu + \hat{l}_0/\varrho_0 \hat{l}_n) \sin \hat{l}_n D \right]}. \quad (8b)$$

$g m_n \langle \gamma \rangle$ sind die nach SLATER [7] definierten Fourierkoeffizienten Floquetscher Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung

$$d^2 w/dz^2 + [\alpha + (s/2) \cos 2z] w = 0 \quad (9a)$$

zum Eigenwert $\alpha_n = \alpha_n \langle \gamma \rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); γ ist der charakteristische Exponent dieser Lösungen ($w \langle z + \pi \rangle = \exp \langle i\pi\gamma \rangle w \langle z \rangle$) mit der durch Gl. (4) erklärten physikalischen Bedeutung; s ist nach Gl. (3) einzusetzen.

Die Fourierkoeffizienten $g m_n \langle \gamma \rangle$ lassen sich auch unabhängig von Gl. (9a) durch die Differenzengleichung

$$(\alpha - \gamma^2) g m \langle \gamma \rangle + (s/4) (g m \langle \gamma + 2 \rangle + g m \langle \gamma - 2 \rangle) = 0 \quad (9b)$$

definieren; sie haben die Orthonormierung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g m_n \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_n^* \langle \gamma + 2\nu \rangle = \delta_{m\nu} \quad (10)$$

und befriedigen außerdem die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} g m_n \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_n^* \langle \gamma + 2\mu \rangle = \delta_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Die übrigen Symbole bedeuten:

$$\hat{l}_\nu = \sqrt{(K + \nu c' b/c)^2 - (b/2)^2} (\gamma + 2\nu + 2c'n_0^2 K/c b^2) \quad (12)$$

(für \hat{l}_0 ist einfach $\nu = 0$ zu setzen)

$$\hat{l}_n = \sqrt{K^2 n_0^2 - (b/2)^2} \alpha_n \langle \gamma \rangle - (c'/c) K n_0^2 b \gamma \quad (13)$$

$$\varrho_0 = \begin{cases} 1 \\ 1/n_0^2 \end{cases} \quad \text{für den } \begin{cases} \text{elektrischen} \\ \text{magnetischen} \end{cases} \text{Polarisationsfall,} \quad (14)$$

wobei beziehungsweise die $\begin{cases} \text{elektrische} \\ \text{magnetische} \end{cases}$ Feldstärke des Lichtwellenfelds parallel zu den Schallwellenfronten schwingt.

Die Intensitätsformel (8) gilt für alle Beugungstypen, ist aber gerade deshalb noch ziemlich unhandlich. Für die in Gl. (7) aufgeführten Beugungsordnungen des einfach-BRAGGSchen Beugungstyps läßt sie sich außerordentlich stark vereinfachen. Dafür ist einmal die γ -Abhängigkeit der in den einzelnen Summanden von Gl. (8b) auftretenden Produkte $g m_n \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_n^* \langle \gamma \rangle$ maßgebend, die wir in [5] eingehend diskutiert haben (vgl. insbesondere die dortigen Fig. 2 und 5d). Bei einfach-BRAGGScher Beugung verschwinden alle diese Produkte identisch bis auf zwei mit den Indizes $n = |\nu| - 1$ und $n = |\nu|$, und die beiden letzteren haben scharf ausgeprägte Maxima bei $\gamma = -\nu$: Die Summe (8b) enthält also nur zwei Glieder. Das-

selbe gilt für $\mu = 0$ auch bei der ganz ähnlich gebauten Summe (11), wodurch

$$\begin{aligned} &g m_{|\nu|-1} \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_{|\nu|-1}^* \langle \gamma \rangle \\ &= -g m_{|\nu|} \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_{|\nu|}^* \langle \gamma \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

folgt.

Ferner ist unter den üblichen experimentellen Bedingungen das Verhältnis $(\lambda_0/a)^2 = (b/K)^2 \lesssim 10^{-3}$ so klein, daß wir etwa mit relativen Fehlern dieser Größenordnung

$$\hat{l}_0 = \hat{l}_\nu = K \quad \text{und} \quad \hat{l}_n = K n_0 \quad (16)$$

setzen dürfen. Mit derselben Genauigkeit erhält man deshalb für die eckigen Klammern im Nenner der beiden nicht verschwindenden Summanden von (8b)

$$[\hat{l}_n = \cos \hat{l}_n D - (i/2) (n_0 + 1/n_0) \sin \hat{l}_n D \quad (17a)$$

$$= \exp \langle -i \hat{l}_n D \rangle - (i/2) (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \sin \hat{l}_n D$$

$$(n = \nu \quad \text{bzw.} \quad = |\nu| - 1)$$

für beide Polarisationsfälle. Da $\hat{l}_n D$ eine sehr große Zahl von der Größenordnung 10^5 ist, darf man die Näherung (16) natürlich nicht in den trigonometrischen Funktionen verwenden.

Schließlich ist der in Gl. (17a) auftretende Ausdruck

$$\frac{1}{2} (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \\ = \begin{cases} 0,042 & \text{für Wasser} \\ 0,16 & \text{für Methylenjodid} \end{cases} \quad (n_0 = 1,33) \\ (n_0 = 1,74)$$

auch bei Flüssigkeiten mit sehr großem Brechungsindex (Methylenjodid!) so klein gegen Eins, daß wir zweite und höhere Potenzen dieses Ausdrucks mit relativen Fehlern von weniger als 3 % gegen Eins vernachlässigen dürfen. So erhält man

$$1/[l]_n = e^{+i\hat{l}_n D} + (i/2) (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 e^{2i\hat{l}_n D} \sin \hat{l}_n D \quad (17b)$$

mit (15) also

$$b_\nu^P = g m_{|\nu|} \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_{|\nu|}^* \langle \gamma \rangle \left\{ e^{i\hat{l}_{|\nu|} D} - e^{i\hat{l}_{|\nu|-1} D} + \right. \\ \left. + (i/2) (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \times \right. \\ \left. \times (e^{2i\hat{l}_{|\nu|} D} \sin \hat{l}_{|\nu|} D - e^{2i\hat{l}_{|\nu|-1} D} \sin \hat{l}_{|\nu|-1} D) \right\}.$$

Nach kurzer Zwischenrechnung folgt daraus

$$I_\nu = |b_\nu^P|^2 \\ = 4 |g m_{|\nu|} \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_{|\nu|}^* \langle \gamma \rangle|^2 \sin^2 \langle (\hat{l}_{|\nu|} - \hat{l}_{|\nu|-1}) D/2 \rangle \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 + \frac{1}{2} (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \times \right. \\ \left. \times [4 \cos^2 \langle (\hat{l}_{|\nu|} - \hat{l}_{|\nu|-1}) D/2 \rangle - 1] \cos \langle (\hat{l}_{|\nu|} + \hat{l}_{|\nu|-1}) D \rangle \right\}. \quad (18)$$

Diese Intensitätsformel gilt für BRAGGSche Beugung bei beliebig großen Schallfeldtiefen; man erkennt, daß I_ν mit der vom Einfallswinkel abhängigen Periode

$$\tilde{D}_{|\nu|} \langle \gamma \rangle = 2\pi / (\hat{l}_{|\nu|} - \hat{l}_{|\nu|-1}) \quad (19)$$

periodisch von der Schallfeldtiefe D abhängt.

Streng genommen wird zwar diese Periodizität durch den mit dem Faktor $\cos \langle \hat{l}_{|\nu|} + \hat{l}_{|\nu|-1} \rangle D$ behafteten Term in der geschweiften Klammer ein wenig gestört, weil dessen Periode (sie beträgt etwa $1/2$ Lichtwellenlänge) mit (22) im allgemeinen nicht kommensurabel sein wird. Aber dieser Term variiert außerordentlich rasch mit D und hängt ebenso empfindlich von den nicht erfaßbaren Inhomogenitäten des Schallfeldes ab, daß experimentell nur sein Mittelwert beobachtet werden kann. Wir dürfen daher den ganzen Term einfach weglassen, weil ein Mittelwert sicher noch erheblich kleiner als der ohnehin schon kleine Maximalwert dieses Terms ist. Physikalisch beschreibt der besprochene Term Interferenzen gleicher Neigung an der planparallelen Flüssigkeitsschicht, die vom durchgehenden Licht der Beugungsordnung ν erzeugt werden. Daß solche Interferenzen experimentell nicht nachweisbar sind, leuchtet ohne weiteres ein.

Bei den üblichen Schallfeldern von allenfalls wenigen Zentimetern Tiefe kann Gl. (18) noch weiter vereinfacht werden, indem man \hat{l}_n ($n = |\nu|$ bzw. $= |\nu| - 1$) wie folgt entwickelt (vgl. Gl. (13))

$$\hat{l}_n = K n_0 - (b^2/8 K n_0) \alpha_n \langle \gamma \rangle - (c'/2 c) n_0 b \gamma. \quad (20)$$

Diese Entwicklung beruht auf der Kleinheit der Zahlen λ_0/a bzw. c'/c und ist berechtigt, solange

$D \ll (\Delta n/n_0)^{-1} D_\nu \approx (10^{-4} \dots 10^{-5}) \tilde{D}_\nu$ bleibt, wie eine einfache Überlegung zeigt. Für die Beugungsordnungen des einfach-BRAGGSchen Beugungstyps folgt damit aus (18) die *Intensitätsformel*

$$I_\nu \langle \gamma \rangle = 4 |g m_{|\nu|} \langle \gamma + 2\nu \rangle g m_{|\nu|}^* \langle \gamma \rangle|^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{2} (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \right] \times \\ \times \sin^2 \left\langle \frac{2\pi D \Delta n}{\lambda_0} \frac{1}{s} (\alpha_{|\nu|} \langle \gamma \rangle - \alpha_{|\nu|-1} \langle \gamma \rangle) \right\rangle, \quad (21)$$

die darüber hinaus auch für den Zwischentyp gültig bleibt, sofern dieser ohne scharfe Grenze in den einfach-BRAGGSchen Typ übergeht (etwa für $s \lesssim 10$).

4. Beugungsintensität in der BRAGGrichtung, minimale Schallfeldtiefe

Wir sind vor allem an der Frage interessiert, bei welchen Schallfeldtiefen die Beugungsordnung ν beobachtet werden kann. Das nach Gl. (6) für die BRAGGrichtung auftretende Extremum von $I_\nu \langle \gamma \rangle$ ist unter den üblichen experimen-

tellen Bedingungen erfahrungsgemäß ein Maximum. Wir brauchen deshalb auf die Winkelabhängigkeit von I_ν gar nicht im einzelnen einzugehen; es genügt für unsere Zwecke, wenn wir Gl. (21) für die BRAGGrichtung $\gamma = -\nu$ numerisch auswerten. Der 1. Faktor von Gl. (21) hat dort ein sehr scharfes Maximum vom Betrag⁵

$$|g m_{|\nu|} \langle \nu \rangle g m_{|\nu|} \langle -\nu \rangle|^2 = \frac{1}{4},$$

wodurch

$$I_\nu \langle -\nu \rangle = \left[1 - \frac{1}{2} (\sqrt{n_0} - 1/\sqrt{n_0})^2 \right] \\ \times \sin^2 \left\langle \frac{2\pi D \Delta n}{\lambda_0} \frac{\alpha_{|\nu|} \langle -\nu \rangle - \alpha_{|\nu|-1} \langle -\nu \rangle}{s} \right\rangle \quad (22)$$

für die Beugungsintensität in der BRAGGrichtung folgt. $I_\nu \langle -\nu \rangle$ hängt also mit der Periode

$$\tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle = \frac{\lambda_0}{2 \Delta n} \frac{s}{\alpha_{|\nu|} \langle -\nu \rangle - \alpha_{|\nu|-1} \langle -\nu \rangle} \quad (23)$$

periodisch von der Schallfeldtiefe D ab; die absoluten Intensitätsmaxima bei

⁵ Dies folgt schon aus der durch Gl. (10) festgelegten Normierung der Funktionen $g m_n \langle \gamma \rangle$, es ist nämlich $1 = \sum_n |g m_n \langle -\nu + 2\mu \rangle|^2 \approx |g m_n \langle -n \rangle|^2 + |g m_n \langle +n \rangle|^2$

für den bei einfach-BRAGGScher Beugung auftretenden Funktionstyp (vgl. [5], insbesondere die dortige Fig. 2). Wegen des allgemein gültigen Symmetriecharakters $g m_n \langle -\gamma \rangle = (-1)^n g m_n \langle \gamma \rangle$ der Mathieuschen Fourierkoeffizienten erhält man daraus die obige Beziehung.

$$D = \frac{1}{2} \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle, \quad \frac{3}{2} \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle \quad \text{usw.}$$

sind praktisch ebenso stark wie die ungestörte Primärintensität, die Eins gesetzt ist. Man beachte, daß die Höhe dieser Maxima von den Parametern des Schallfeldes (Schallintensität $\sim (\Delta n/n_0)^2$, Wellenlängenverhältnis a/λ_0 , Schallfeldtiefe D) vollkommen unabhängig ist! Man kann daher z. B. keineswegs aus der Beugungsintensität direkt auf die Schallintensität schließen, wenn die Schallintensität gerade in der Umgebung der oben angegebenen Werte liegt.

Für $D = 0$, $D_\nu \langle -\nu \rangle$, usw. verschwindet $I_\nu \langle -\nu \rangle$. Wir ermitteln nun, wie weit sich die ν -te Beugungsordnung bei Annäherung an diese absoluten Intensitätsminima noch beobachten läßt: Einer experimentell gerade noch nachweisbaren Beugungsintensität $I_{\min} \ll 1$ (deren Größe wird natürlich durch die Empfindlichkeit der Nachweismethode bestimmt) kann durch

$$I_{\min} = \left(\frac{2\pi D_\nu^{\min} \Delta n}{\lambda_0} \frac{\alpha_{|\nu|} \langle -\nu \rangle - \alpha_{|\nu|-1} \langle -\nu \rangle}{s} \right)^2$$

eine minimale Schallfeldtiefe

$$\begin{aligned} D_\nu^{\min} &= \frac{\lambda_0}{2\pi \Delta n} \frac{s}{\alpha_{|\nu|} \langle -\nu \rangle - \alpha_{|\nu|-1} \langle -\nu \rangle} \sqrt{I_{\min}} \\ &= \frac{1}{\pi} \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle \sqrt{I_{\min}} \end{aligned} \quad (24a)$$

zugeordnet werden, indem man die Sinusfunktion in (22) einfach durch ihr Argument ersetzt. (Für den 1. Faktor von $I_\nu \langle -\nu \rangle$ haben wir hierbei näherungsweise Eins eingesetzt.) D_ν^{\min} gibt allgemeiner die Ausdehnung der absoluten Minima der Beugungsintensität an, d. h. die ν -te Beugungsordnung kann nur für Schallfeldtiefen

$$\begin{aligned} D_\nu^{\min} \leq D \leq \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle - D_\nu^{\min} \\ \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle + D_\nu^{\min} \leq D \leq 2 \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle - D_\nu^{\min} \end{aligned} \quad (24b)$$

usw. beobachtet werden.

Kennt man alle experimentellen Parameter, so ist die numerische Berechnung der minimalen Schallfeldtiefe D_ν^{\min} und der Schallfeldperiode $\tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle$ sehr einfach: Die in den Gl. (23) und (24a) auftretenden Mathieuschen Eigenwerte $\alpha_{|\nu|} \langle -\nu \rangle$ und $\alpha_{|\nu|-1} \langle -\nu \rangle$ sind gleichzeitig Eigenwerte der periodischen Mathieuschen Funktionen und als solche sehr genau in den Mathieu-Tables [8] tabelliert⁶. Vielfach genügen auch die folgen-

⁶ Die in den Mathieu-Tables [8] tabellierten Eigenwerte be_n und bo_n hängen mit den hier benutzten $\alpha_n \langle \gamma \rangle$ wie folgt zusammen: Es ist für $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha_n \langle \pm n \rangle &= be_n - s/2 \\ \alpha_{n-1} \langle \pm n \rangle &= bo_n - s/2, \quad \text{also insbesondere} \\ \alpha_n \langle \pm n \rangle - \alpha_{n-1} \langle \pm n \rangle &= be_n - bo_n \end{aligned}$$

den Näherungsformeln, die man aus den bekannten, für kleine s gültigen Potenzentwicklungen der Mathieuschen Eigenwerte (Mathieu-Tables, S. XVII ff.) erhält:

Tabelle I
Näherungsformeln

$ \nu $	$(1/s)(\alpha_{ \nu } \langle -\nu \rangle - \alpha_{ \nu -1} \langle -\nu \rangle)$
1	0,500
2	$3,13 \cdot 10^{-2} s$
3	$4,88 \cdot 10^{-4} s^2$
4	$3,39 \cdot 10^{-6} s^3$
5	$1,32 \cdot 10^{-8} s^4$
6	$3,31 \cdot 10^{-11} s^5$

Die Genauigkeit dieser Näherungsformeln ist allerdings nicht sehr groß: Für die Grenze der einfach-BRAGGSchen Beugung, d. h. für $|\nu| = 1,19 \sqrt{s}$ oder $s = 0,707 \cdot \nu^2$, wird der mit den Näherungsformeln berechnete Ausdruck $(1/s)(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})$ um etwa 5 bis 8 % zu groß, und dieser Fehler wächst für größere s außerordentlich rasch an. Wesentlich genauer ist nur die Formel für $\nu = 1$, die bei $s = 5$ z. B. erst einen Fehler von 2 % ergibt. Trotzdem sind die Formeln der Tabelle I für Abschätzungszwecke infolge ihrer großen Einfachheit sehr wertvoll.

5. Vergleich mit den Experimenten von WILLARD

Ein Vergleich unserer theoretischen Ergebnisse mit den Experimenten von WILLARD [3] muß leider auf diejenigen Versuche beschränkt bleiben, für welche aus den dortigen Angaben die benutzte Schallintensität bzw. Brechungsindexschwankung Δn ermittelt werden kann. Diese Experimente sind so ausgeführt, daß bei festen Werten aller übrigen Parameter die Mindestspannung U am Schwingquarz gemessen wird, bei der BRAGGSche Beugung in 1. bzw. 2. bzw. 3. Ordnung auftritt. Der experimentelle Wert der Schallfeldtiefe (2,16 cm) ist demnach im Sinne unserer Überlegungen als experimenteller Wert der minimalen Schallfeldtiefe D_ν^{\min} für alle Beugungsordnungen aufzufassen; variiert wird die Brechungsindexschwankung Δn und proportional zu dieser der Parameter s .

Die numerischen Resultate des Vergleichs zeigt Tabelle II: Für $s = 0,26$ (1. Spalte) sind nach Gl. (7) nur selektive Beugungserscheinungen möglich, die \sqrt{s} -Kriterien der Gl. (7) haben dann keine Bedeutung mehr. Obwohl diese Kriterien in Strenge nur für große s gelten, gibt $1,19 \sqrt{s}$ bei $s = 2,19$ bzw. $s = 6,16$ (2. bzw. 3. Spalte) schon sehr genau die niedrigste selektive Beugungsordnung 2 bzw. 3 an.

Das Auftreten höherer Beugungsordnungen ($\nu = 2$ bzw. 3 bzw. 4 in Spalte 1 bzw. 2 bzw. 3) wird zwar durch die Kriterien der Gl. (7) nicht ausgeschlossen, aber diese Ordnungen werden

Tabelle II

Auftreten der Beugungsordnungen $\nu = 1, 2, 3$ im BRAGG-winkel

Zahlenwerte der experimentellen Parameter nach WILLARD [3]:

- $\lambda_0 = 0,546 \cdot 10^{-4}$ cm,
- $n_0 = 1,33$ (Wasser),
- $c' = 1,50 \cdot 10^5$ cm/s,
- $D = 2,16$ cm,
- $f = 35$ MHz (Quarzfrequenz),
- $U =$ Quarzspannung in Volt,
- $A_n = \frac{U \cdot f \cdot \lambda_0}{2040 \cdot 7} = 1,34 \cdot 10^{-7} U$ (Volt)

(WILLARDS Gl. (9), gütlig für Wasser).

auf tretende Beugungsordnung ν	1.	2.	3.
Quarzspannung U (Volt) nach WILLARD	15	125	350
Brechungsindexamplitude $\Delta n \cdot 10^5$	0,20	1,67	4,69
Parameter s nach Gl. (3) . . .	0,26	2,19	6,16
1,19 $\sqrt{s} =$ untere Grenze der selektiven Beugungsordn. .	—	1,76	2,95
D_1^{min} nach Gl. (24a) in cm	D_2^{min} 133	D_3^{min} 55,2	D_4^{min} 2,61**
	(2,16)*	—	57,8

* Als Eichwert zur Bestimmung von I_{min} benutzt.
** Ohne Verwendung der Näherungsformeln von Tabelle I mit den Tafelwerten aus [8] berechnet.

erst bei wesentlich höheren Schallfeldtiefen beobachtbar: Das zeigen die Zahlenwerte für D_1^{min} . Zur Berechnung dieser Werte wurde als Minimalintensität $I_{min} = 0,062 \approx 1/16$ verwendet — diesen Wert erhält man, wenn man in der 1. Spalte für D_1^{min} den experimentellen Wert (2,16 cm) einsetzt. WILLARD macht selbst keine quantitativen Angaben über Beugungsintensitäten, offensichtlich sind seine Experimente mit subjektiver Beobachtung ausgeführt. Bedenkt man die darin liegende Unsicherheit, so muß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als sehr befriedigend bezeichnet werden; ein Ergebnis, das gleichermaßen für die sorgfältige Durchführung der Experimente wie für die Brauchbarkeit der Theorie spricht. Zur weiteren Bestätigung der Theorie wäre es erwünscht, wenn derartige Experimente auch bei größeren Werten des Parameters s an höheren Beugungsordnungen ausgeführt würden.

6. WILLARDS Kriterien für das Auftreten BRAGGScher Beugung

WILLARD selbst hat in [3] für das Auftreten BRAGGScher Beugung die beiden folgenden Kri-

terien angegeben (mit unseren Bezeichnungen):

$D/a^2 = 2 N n_0 / |\nu| \lambda_0, \quad N \geq 1, \quad (W 1)$

$D \Delta n / \lambda_0 > |\nu| / 32 N. \quad (W 2)$

WILLARD nimmt an, daß ein im BRAGGSchen Winkel einfallendes Primärbündel mindestens $N \geq 1$ Schallwellenfronten durchlaufen muß, wenn BRAGGSche Beugung auftreten soll. Das Kriterium (W 1) ist nur die mathematische Formulierung dieser Annahme, also rein geometrischer Natur. Das Kriterium (W 2) soll das gleichzeitige Auftreten BRAGGScher und normaler Beugung bei derselben Beugungsordnung ausschließen.

Zum Vergleich mit unseren Ergebnissen formen wir diese Kriterien noch etwas um, indem wir für (W 2)

$D = M^2 |\nu| \lambda_0 / 32 \Delta n N \quad \text{mit} \quad \begin{cases} M > 1 \\ N \geq 1 \end{cases} \quad (W 2')$

schreiben. Dann eliminieren wir D aus (W 1) und (W 2'), das liefert

$64 \frac{N^2}{M^2} \left(\frac{n_0 a}{\lambda_0} \right)^2 \frac{\Delta n}{n_0} = \nu^2 \quad (W 3)$

oder $|\nu| = 2 (N/M) \sqrt{s}$ mit unserer Abkürzung s nach Gl. (3). Offensichtlich sind die Kriterien (W 2') und (W 3) vollkommen mit (W 1) und (W 2) äquivalent; wir wollen sie deshalb ebenfalls als WILLARDSche Kriterien bezeichnen, obwohl sie in dieser Form bei WILLARD nicht vorkommen.

Man übersieht nun unmittelbar, daß (W 3) unsern \sqrt{s} -Kriterien (Gl. (7)) entspricht, wenn man zusätzlich

$M = N$ für $s > 25$, $M = 1,68 N$ für $s < 25$ fordert. Das Kriterium (W 2) bzw. (W 2') andererseits hat eine gewisse Ähnlichkeit mit unserer Bedingung (24): Für $\nu = 1$ und $D < \tilde{D}_\nu \langle -\nu \rangle - D_\nu^{min}$ nimmt diese die Form

$D > D_1^{min} = (\lambda_0 / \pi \Delta n) \sqrt{I_{min}} \quad (25)$

an; das WILLARDSche Kriterium gibt bis auf unwesentliche Zahlenfaktoren die Proportionalität von D_1^{min} mit $\lambda_0 / \Delta n$ richtig wieder. Während aber das Kriterium (W 2) eine solche Proportionalität für alle $|\nu|$ fordert, wird nach unserer Rechnung

$D_1^{min} \sim \frac{\lambda_0}{\Delta n} s^{1-|\nu|} \sim \frac{\lambda_0^{2|\nu|-1}}{(\Delta n)^{|\nu|} n_0^{|\nu|-1} a^{2|\nu|-2}},$

wie man aus Gl. (24a) und Gl. (3) und den Näherungsformeln von Tabelle I entnimmt; das Kriterium (W 2) hat also für $\nu \geq 2$ keine Gültigkeit mehr.

Rein numerisch ist zwar (W 2) als Ungleichung auch für $\nu \geq 2$ noch erfüllt, aber als physikalisches Kriterium nicht mehr brauchbar. Das zeigt eine Berechnung des in (W 2')

eingeführten „Ungleichheitsfaktors“ M^2 aus den experimentellen Daten der WILLARDSchen Versuche (unsere Tabelle II), man erhält:

$$\begin{aligned} M^2 &= 6,2 & \text{für } \nu &= 1 \text{ (1. Spalte von Tabelle II),} \\ M^2 &= 51 & \text{für } \nu &= 2 \text{ (2. Spalte von Tabelle II),} \\ M^2 &= 142 & \text{für } \nu &= 3 \text{ (3. Spalte von Tabelle II).} \end{aligned}$$

Der „Ungleichheitsfaktor“ M^2 wächst also zwischen $\nu=1$ und $\nu=3$ auf das 23fache an, während er bei einem guten Kriterium etwa konstant bleiben müßte. Wir konnten demgegenüber D_2^{min} und D_3^{min} mit relativen Fehlern von 0,1 bzw. 0,2 aus den experimentellen Parametern s und $\lambda_0/\Delta n$ nach Gl. (24a) vorausberechnen (Tabelle II).

In der 1. Beugungsordnung tritt nur dann BRAGGSche Reflexion auf, wenn

$$s = 16 (n_0 a / \lambda_0)^2 (\Delta n / n_0) = s_0 \lesssim 1 \quad (26)$$

ist (Gl. (7)). Gilt also das Kriterium (W 2) nur für $\nu=1$, so gilt es auch nur für $s=s_0 \lesssim 1$. Durch Elimination von Δn aus Gl. (25) und Gl. (26) folgt aber die Beziehung

$$D_v^{min}/a^2 = 16 (\sqrt{I_{min}}/\pi s_0) (n_0/\lambda_0) \quad s_0 \lesssim 1$$

für D_v^{min} , die bei festgehaltenem $s=s_0$ offensichtlich dem für $\nu=1$ angeschriebenen Kriterium (W 1) entspricht: Allerdings zeigt sich, daß der Minimalwert des „Ungleichheitsfaktors“ N im allgemeinen nicht Eins, sondern

$$N_{min} = 16 (\sqrt{I_{min}}/\pi s_0)$$

ist und damit vor allem wesentlich von der Empfindlichkeit der Nachweismethode abhängt. Einerseits ist also auch das Kriterium (W 1) in diesem Sinne noch für die 1. Beugungsordnung zu rechtfertigen. Andererseits aber liefern (W 1)

und (W 2') zusammen gerade das mit den angegebenen Zusatzbedingungen für $s>1$ gültige Kriterium (W 3). Da aber (W 2') für $s>1$ seine Gültigkeit verliert, muß demnach auch (W 1) für $s>1$ ungültig werden: Die Unstimmigkeiten beider Kriterien sind so beschaffen, daß sie sich bei der Kombination zu (W 3) gerade kompensieren.

Dem Direktor des Instituts für theoretische Physik der Technischen Hochschule Karlsruhe, Herrn Prof. Dr. F. WOLF, danke ich für die Möglichkeit, in seinem Institut zu arbeiten.

Bedeutung der im Text nicht erklärten Symbole:

- a = Schallwellenlänge,
- $b = 2\pi/a$,
- c = Lichtgeschwindigkeit,
- c' = Schallgeschwindigkeit,
- ω' = Kreisfrequenz der Schallwellen,
- D = Schallfeldtiefe,
- n_0 = mittlerer Brechungsindex der Flüssigkeit,
- Δn = Brechungsindexamplitude,
- λ_0 = Lichtwellenlänge (Vakuum bzw. Luft),
- $K = 2\pi/\lambda_0$.

(Eingegangen am 15. Juni 1955.)

Schrifttum

- [1] RAMAN, C. V. und NATH, N. S. N., Proc. Indian Acad. Sci. **3** [1936], 119 und 459.
- [2] BERGMANN, L., Der Ultraschall, 6. Aufl. S. Hirzel Verlag, Zürich 1954, S. 284 ff.
- [3] WILLARD, G. W., J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 101.
- [4] WAGNER, E. H., Z. Phys. **141** [1955], 604.
- [5] WAGNER, E. H., Z. Phys. **141** [1955], 622.
- [6] BRILLOUIN, L., Act. scient. et industr. Nr. 59, Paris 1933.
- [7] SLATER, J. C., Phys. Rev. **87** [1952], 807.
- [8] Tables Relating to Mathieu Functions, Prepared by the Comp. Lab., Nat. Appl. Math. Lab., Nat. Bureau of Standards, New York 1951.

ULTRASCHALLABSORPTION IN WASSER UND IHRE ABHÄNGIGKEIT VON TEMPERATUR UND LUFTGEHALT DES WASSERS*

von S. K. MUKHOPADHYAY

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Die Ultraschallabsorption in Wasser und ihre Abhängigkeit von der Temperatur und besonders vom Gehalt des Wassers an gelöster Luft wurde nach der optischen Methode von DEBYE und SEARS bei einer Frequenz von 48 MHz untersucht. Es wurde in dem kleinen Temperaturbereich von 20° bis 28°C gemessen. Dabei wurde der Luftgehalt des Wassers von 1 bis 102 % Sättigung variiert. Es ergab sich, daß der Luftgehalt des Wassers innerhalb der Meßgenauigkeit von $\pm 4\%$ keinerlei Einfluß auf die Absorption von Ultraschall hat; dabei wurde der Gehalt an Kohlensäure nicht berücksichtigt. In Übereinstimmung mit allen früheren Messungen ergab sich ferner, daß die Ultraschallabsorption im genannten Temperaturbereich einen negativen Temperaturkoeffizienten hat. Für die auf das Quadrat der Frequenz bezogene Absorption αf^{-2} wurde ein Wert von $25,3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ bei 20 °C gefunden.

Summary

The ultrasonic absorption in water and its dependence on temperature (20° to 28 °C) and dissolved air-content (1 to 102 % saturation) were investigated at a frequency of 48 Mc/s using the optical method of DEBYE and SEARS. It appears that within the precision of experiment ($\pm 4\%$) the air-content had no effect on the ultrasonic absorption, the carbon dioxide content not being reckoned. The coefficient of variation of absorption α with temperature was negative, as generally found, αf^{-2} having a value $25,3 \times 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ (f = frequency) at 20 °C.

Sommaire

On a étudié, en appliquant la méthode optique de DEBYE et SEARS, à une fréquence de 48 MHz, l'absorption des ultra-sons dans l'eau et la variation de cette absorption en fonction de la température et surtout en fonction de la teneur en air dissous. Les mesures ont été faites dans le petit intervalle de températures, de 20° à 28 °C. On a fait varier la teneur en air dissous depuis 1 jusqu'à 102 %. On a trouvé que dans les limites de la précision des mesures qui était de $\pm 4\%$ la teneur en air dissous n'avait aucune influence sur l'absorption des ultra-sons; ces mesures ont été faites sans tenir compte de la teneur en gaz carbonique (CO₂). D'accord avec tous les résultats de mesures antérieures, on a trouvé que dans l'intervalle des températures considéré, le coefficient de température de l'absorption des ultra-sons, était négatif. Comme valeur de l'absorption rapportée au carré de la fréquence αf^{-2} on a trouvé la valeur $25,3 \times 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ à 20 °C.

1. Einführung

a) Frühere Messungen der Schallgeschwindigkeit und der Absorption von Ultraschall in Wasser

Die Schallgeschwindigkeit und Absorption von Ultraschall in Wasser sind von einer Vielzahl von Autoren gemessen worden, so daß hierüber genaue Daten vorliegen. Erwähnt sei vor allem eine Arbeit von WILLARD [1], der die Schallgeschwindigkeit in destilliertem Wasser bei 10 MHz mit Hilfe der Beugung am Ultraschallgitter gemessen hat. Er gibt für die Schallgeschwindigkeit einen Wert von $1498 \pm 1 \text{ m s}^{-1}$ an.

Unter den Messungen der Absorption sind die Arbeiten von PINKERTON [2], [3] hervorzuheben, dessen Ergebnisse sehr umfassend sind und außerordentlich zuverlässig erscheinen. Desglei-

chen seien Messungen von PANCHOLY [4], FOX und ROCK [5] und SMITH und BEYER [6] genannt. Die Meßwerte dieser Autoren sind in der Tabelle I zusammengestellt. Hier ist die frequenzunabhängige Größe αf^{-2} eingetragen. Da-

Tabelle I

Autor	$\alpha f^{-2} \cdot 10^{15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ bei 20 °C	Meßmethode
PINKERTON	25.3	Impulsmethode
PANCHOLY	24.8*	Impulsmethode
FOX und ROCK	24.0	Messung des Strahlungsdrucks
SMITH u. BEYER	26.5**	Messung des Strahlungsdrucks

* Gekürzte Fassung einer Dissertation an der Universität Göttingen.

* Auf 20 °C reduziert mit Hilfe einer Reduktionstabelle nach PINKERTON.

** Mittelwert über die angegebenen Werte.

bei ist α der Absorptionskoeffizient und f die Frequenz in Hertz.

Aus den genannten Messungen ist auch der Verlauf der Temperaturabhängigkeit der Ultraschallabsorption sehr genau bekannt, und zwar nimmt die Absorption mit steigender Temperatur stark ab. Aus diesem Grunde sind hier alle Absorptionswerte für die gleiche Temperatur, nämlich 20 °C, angegeben.

Die Messungen zeigen übereinstimmend, daß die experimentell erhaltenen Werte für αf^{-2} etwa dreimal so groß sind wie die nach der klassischen Theorie von STOKES [7] auf Grund der Schubviskosität berechneten Werte. Der über den klassischen Anteil hinausgehende Wert der Absorption ist von HALL [8], KNESER [9] und GIERER und WIRTZ [10] gedeutet worden. HALL hat eine Theorie der Absorption auf Grund von Strukturrelaxationen formuliert. Dabei wird ein isothermer Volumenviskositätskoeffizient der Flüssigkeiten angenommen, der für Wasser wesentlich größer ist als der Schubviskositätskoeffizient. Nach der HALLschen Theorie ergibt sich für den nicht nach STOKES erklärbaren Anteil an der Absorption ein Wert von $17,5 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ bei 20 °C, während PINKERTON experimentell diesen Wert zu $17,15 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ bestimmte. Durchgeführt wurden die HALLschen Berechnungen unter der Annahme, daß die Kompressibilität des Wassers bei unendlich hoher Frequenz $18 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$ beträgt. Die Theorie von HALL zeigt damit eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment.

b) Einfluß der im Wasser gelösten Luft

Bei der Untersuchung der Schallgeschwindigkeit und Absorption von Ultraschall in Wasser ist der Einfluß der Luft zu berücksichtigen. Luft kann in zweierlei Form anwesend sein: als im Wasser gelöste Luft oder in Form fein verteilter Luftbläschen. Der Einfluß von Luftbläschen auf die Schallgeschwindigkeit und Absorption ist in einer größeren Anzahl von Arbeiten behandelt worden (siehe z. B. MEYER und SKUDRZYK [11]). Hier soll jedoch nur der Einfluß der im Wasser gelösten Luft behandelt werden.

Wasser kann relativ große Mengen von Luft absorbieren, wobei allgemein die Aufnahmefähigkeit mit wachsender Temperatur abnimmt. Aus der Tabelle II sind die Luftmengen zu sehen, die in luftgesättigtem Wasser bei verschiedenen Temperaturen bei Abwesenheit von Kohlendioxyd und Ammoniak und bei 760 mm Hg enthalten sind. Abb. 1 zeigt die Löslichkeit von Luft in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur.

Tabelle II
Luftgehalt des Wassers bei verschiedenen Temperaturen
(nach D'ANS und LAX [12])

Temperatur	Luftgehalt in 1 l Wasser	Temperatur	Luftgehalt in 1 l Wasser
°C	cm ³	°C	cm ³
0	29,18	20	18,68
2	27,69	21	18,34
4	26,32	22	18,01
6	25,06	23	17,69
8	23,90	24	17,38
10	22,84	25	17,08
12	21,87	26	16,79
14	20,97	27	16,50
15	20,55	28	16,21
16	20,14	29	15,92
18	19,38	30	15,64

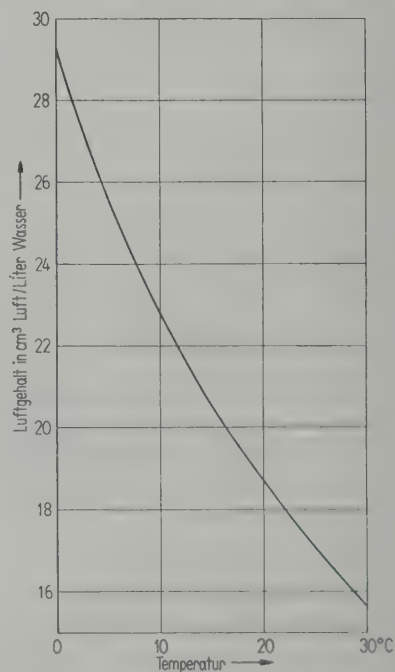


Abb. 1. Löslichkeit der Luft in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur nach D'ANS und LAX [12] bei 760 mm Hg.

Viel Aufmerksamkeit ist der Frage nach dem Einfluß von gelöster Luft im Wasser auf die Schallgeschwindigkeit gewidmet worden. HERBECK [13] beobachtete einen Anstieg der Schallgeschwindigkeit in luftgesättigtem Wasser um ca. $0,1 \text{ m s}^{-1}$ gegenüber luftfreiem Wasser bei 785 kHz. Messungen im Kundtschen Rohr von MEYER und SKUDRZYK [14] mit luftgesättigtem Wasser und luftfreiem Wasser bei einer Frequenz von 10 kHz ergaben, daß die Änderung der Schallgeschwindigkeit unter 1‰ liegen muß. Es

bleibt zu untersuchen, welchen Einfluß im Wasser gelöste Luft auf die Dämpfung im Ultraschallgebiet hat. MEYER und SKUDRZYK veröffentlichten in der gleichen Arbeit [14] auch Dämpfungsmessungen im Wasser mit einer Frequenz von 100 kHz bei verschiedenem Gehalt an gelöster Luft. Die Messungen, die mit einem Nachhallverfahren durchgeführt wurden, ergaben, daß die Schallabsorption bei der genannten Frequenz im Rahmen der Meßgenauigkeit von 2% unabhängig vom Luftgehalt ist.

c) Genaue Formulierung der Fragestellung

Die mit der vorliegenden Arbeit verfolgte Absicht war nun eine zweifache: Einmal sollte bei einer bestimmten sehr hohen Frequenz die Absorption von Ultraschallwellen gemessen und die Temperaturabhängigkeit von αf^{-2} , dem frequenzbezogenen Absorptionskoeffizienten, bestimmt werden. Das Hauptziel der Arbeit war jedoch, genaue Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Ultraschallabsorption in Wasser und dem Gehalt des Wassers an gelöster Luft anzustellen.

2. Theoretische Betrachtungen

Für die Anordnung der Wassermoleküle in einem Flüssigkeitsvolumen nimmt HALL [8] zwei Zustände an. Im Zustand 1 ist das von einem Molekül beanspruchte Volumen größer und seine potentielle Energie kleiner als im Zustand 2. Verdichtung, Verdünnung oder Änderung der Temperatur durch einfallende Schallwellen verschieben das thermodynamische Gleichgewicht zwischen den beiden möglichen Zuständen der Moleküle, so daß ein Übergang von Molekülen aus dem Zustand 1 in den Zustand 2 oder umgekehrt bewirkt wird. Jeder Übergang braucht eine gewisse endliche Zeit τ . Diese Zeitkonstante τ liegt bei Wasser in der Größenordnung von 10^{-12} s. Dieser Wert wurde jedoch bisher noch nicht experimentell bestätigt. Die zwischen Druck und Dichte auftretende Phasenverschiebung äußert sich als zusätzliche Dämpfung (Strukturrelaxationsdämpfung) der Schallwelle, die gegeben ist durch

$$\alpha_{rel} = \frac{A \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad (1)$$

dabei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der Schallwelle; die Konstante A ist ein Maß für die Größe der Strukturrelaxationsdämpfung.

Die gesamte Absorption im Wasser kann dann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\alpha = \frac{A \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + B \omega^2. \quad (2)$$

Hier ist $B \omega^2$ die klassische Absorption, die hauptsächlich durch die Schubviskosität bestimmt ist, während die Wärmeleitung eine untergeordnete Rolle spielt. Es sei nun α_1 der Absorptionskoeffizient in luftgesättigtem Wasser und α_2 der Absorptionskoeffizient in luftfreiem Wasser. Dann muß, vorausgesetzt, daß eine solche Addition überhaupt zulässig ist, die Absorption durch gelöste Luft gegeben sein durch

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (3)$$

Wie bereits erwähnt, ist es Aufgabe dieser Arbeit, γ aus dieser Gleichung zu bestimmen.

3. Experimentelle Methode

a) Wahl des Meßverfahrens

Frühere Arbeiten von KURTZE und TAMM [15] und KURTZE [16] haben gezeigt, daß im Frequenzbereich von 10 bis 100 MHz die optische Methode von DEBYE und SEARS [17] und LUCAS und BIQUARD [18] für relative Messungen der Schallintensität sehr geeignet ist. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die DEBYE-SEARS-Methode mit einer Frequenz von etwa 48 MHz angewandt. Die gewählte Frequenz mit einer auswertbaren Meßstrecke von 45 mm erschien als günstiger Kompromiß zwischen den bei höheren und tieferen Frequenzen auftretenden Schwierigkeiten. Bei höheren Frequenzen wird die Meßstrecke und damit auch die Meßgenauigkeit zu klein, bei tieferen Frequenzen wären wegen der längeren Meßstrecke die Anforderungen an die Präzision der Apparatur zu hoch und die benötigte Wassermenge zu groß gewesen. Zur Messung der Schallintensität wurde die Intensität des Lichtes in der ersten Beugungsordnung ausgenutzt. BIQUARD [19] hat gezeigt, daß die Lichtintensität des Spektrums erster Ordnung proportional ist zur Schallintensität, wenn nur die Lichtintensität in der zweiten Beugungsordnung klein ist gegen die Intensität in der ersten Ordnung. Bei der benutzten Frequenz ist es sehr schwierig, ein helles Beugungsbild zu erhalten, wenn sich Schallstrahl und Lichtstrahl genau senkrecht kreuzen. Jedoch kann ein relativ helles Beugungsspektrum erster Ordnung auf einer Seite der nullten Ordnung erhalten werden, wenn der Winkel zwischen den beiden Strahlen etwas von 90° verschieden ist [15], [16].

Bei Kontrollversuchen über die Verwendbarkeit des unsymmetrischen Beugungsbildes zur Messung der Absorption wurde von KURTZE [16] ein rein exponentieller Abfall der Lichtintensität der ersten Beugungsordnung mit der Entfernung vom Schallstrahler über einen Intensitätsbereich von 300:1 festgestellt. Messungen der Absorp-

tion von reinem Wasser nach dieser Methode ergaben gute Übereinstimmung mit früher gemessenen Werten, obwohl es für dieses Phänomen der unsymmetrischen Beugungsbilder bei Kreuzungswinkeln von $90^\circ \pm d$, wobei d ein sehr kleiner Winkel ist, bisher offenbar noch keine theoretische Erklärung gibt. Auf Grund der oben erwähnten guten Resultate dieser Methode wurde sie auch in der vorliegenden Untersuchung verwandt.

Bei einer Frequenz von 48,12 MHz und 21,1 °C beträgt die Amplitudendämpfung einer Ultraschallwelle in Wasser 497 dB/m. Bei der benutzten Versuchsanordnung wurde der Ultraschallstrahl auf einer Strecke von 40 bis 45 mm bis zur Empfindlichkeitsschwelle der Apparatur weggedämpft.

b) Die Meßanordnung

Die Meßanordnung entsprach im wesentlichen der von KURTZE [16] verwendeten.

α) Die experimentelle Anordnung und ihr Prinzip

Eine schematische Skizze der Apparatur gibt Abb. 2, eine Ansicht Abb. 3. Das Licht einer batteriegespeisten Glühfadenlampe wird durch ein Linsensystem L_1 parallel gemacht und tritt dann durch einen waagrecht liegenden Spalt von 0,82 mm Breite und 19 mm Länge in das Meßgefäß ein. Es kreuzt den Schallstrahl und erzeugt in der Brennpunktsebene der Linse L_2 ein Beugungsbild. Im Brennpunkt der Linse L_2 wird ein Teil des Beugungsbildes zusammen mit der null-

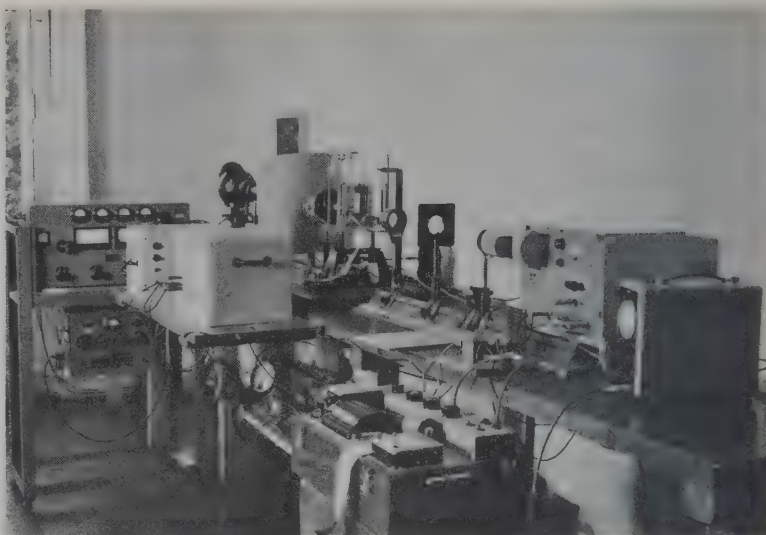


Abb. 3. Die experimentelle Anordnung.

ten Ordnung durch einen schwarzen Schirm ausgeblendet. Der andere Teil, der im wesentlichen das helle Spektrum erster Ordnung enthält, so daß seine Gesamtintensität hauptsächlich aus dem Beugungsspektrum der ersten Ordnung stammt, wird auf die Photokathode eines Sekundärelektronenvervielfachers abgebildet.

Zur Vermeidung von Störungen durch Streulicht wurde der Schallstrahl mit 550 Hz moduliert, so daß auch das ausgenutzte Beugungslicht moduliert war. Durch Verwendung eines selektiven Verstärkers hinter dem Multiplier konnte der Einfluß des Streulichtes ausgeschlossen werden.

Die Ausgangsspannung des Resonanzverstärkers wurde mit Hilfe eines logarithmisch registrierenden Pegelschreibers (Brüel & Kjær, Kopenhagen) aufgezeichnet. Die Papiervorschubgeschwindigkeit wurde dabei sorgfältig konstant gehalten. Aus der Steigung der registrierten Geraden und dem bekannten Verhältnis der Geschwindigkeit von Papier und Küvette kann der Absorptionskoeffizient errechnet werden.

Zur Vereinfachung wurde übrigens für die Auswertung der Pegelschreiberstreifen eine durchsichtige Skala benutzt, die unter Berücksichtigung der Papiervorschubgeschwindigkeit und der Hub- und Senkgeschwindigkeit der Küvette so eingeteilt war, daß sie nach Anlegen einer eingetragten Geraden an die Linien auf dem Pegelschreiberstreifen direkt die Absorption in dB/m angab. Zwei solche Streifen zeigt die Abb. 4. für luftfreies (Abb. 4 oben) und für luftgesättigtes Wasser (Abb. 4 unten). Die Ablesegenauigkeit betrug 1 bis 2%.

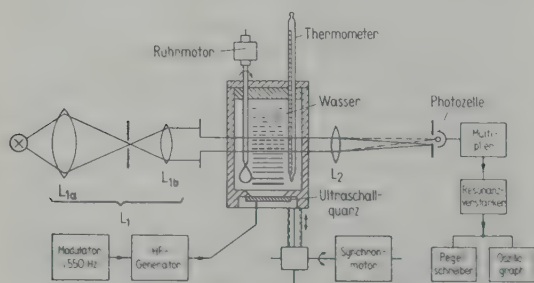


Abb. 2. Schematische Darstellung der Meßapparatur.

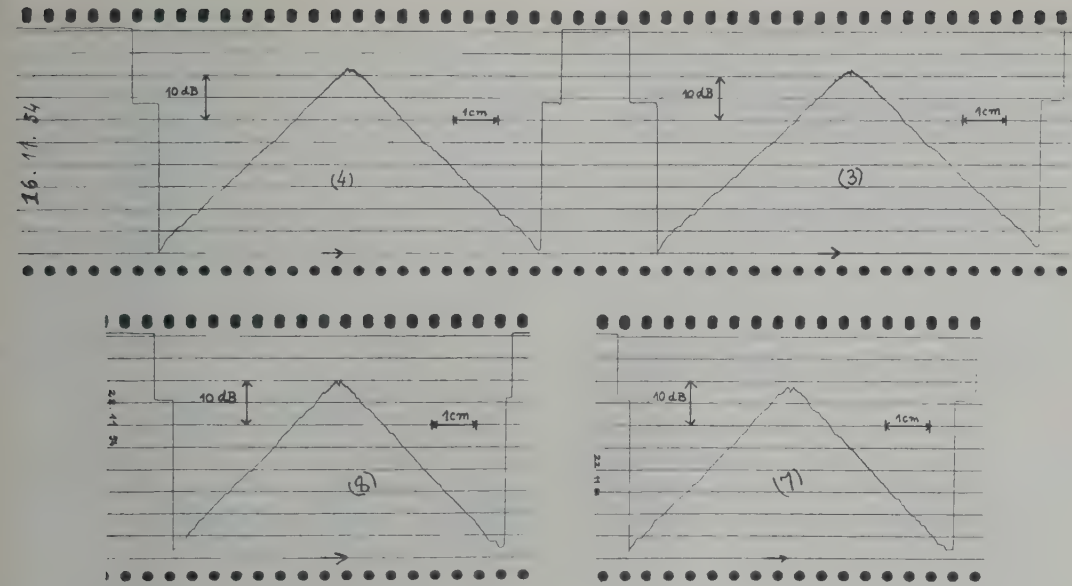


Abb. 4. Beispiel einer Registrierung des Intensitätsabfalls.

Oben: Luftgehalt des Wassers bei 20 °C und 760 mm Hg $= 0,1 \cdot 10^{-4}$ Mol/Liter, entsprechend 1,3 % Sättigung. Meßfrequenz 47,6 MHz. Temperatur bei Meßstreifen Nr. 3: 27 °C und bei Meßstreifen Nr. 4: 26,6 °C. Ultraschall-dämpfung bei Meßstreifen Nr. 3: 420 dB/m; bei Meßstreifen Nr. 4: 428 dB/m.

Unten: Luftgehalt des Wassers bei 20 °C und 760 mm Hg $= 7,03 \cdot 10^{-4}$ Mol/Liter, entsprechend 90,5 % Sättigung. Meßfrequenz 47,1 MHz. Temperatur bei Meßstreifen Nr. 7: 22,5 °C und bei Meßstreifen Nr. 8: 22,7 °C. Ultraschall-dämpfung bei Meßstreifen Nr. 7: 464 dB/m und bei Meßstreifen Nr. 8: 461 dB/m. (1 cm auf dem Streifen entspricht 1,1 cm Höhenverschiebung der Küvette.)

β) Meßküvette mit Quarzhalterung

Ein quaderförmiges Gefäß mit den Innenabmessungen von $72 \times 65 \times 25 \text{ mm}^3$ wurde bei diesen Messungen als Meßküvette benutzt. Es bestand aus Vinidur, einem Kunststoff auf Polyvinylchloridbasis. Die vom Licht durchstrahlten Seitenwände bestanden aus Glasplatten hoher optischer Güte (Abb. 5). Auf dem Boden war der Ultraschallgeber, ein Quarzkristall mit den Abmessungen $20 \times 7 \text{ mm}^2$ und einer Dicke von 0,3 mm, so befestigt, daß er ebene Wellen in vertikaler Richtung ausstrahlte. Seine tiefste Eigenfrequenz für Dickenschwingungen lag bei etwa 9,6 MHz. Die Befestigung des Quarzes ist in Abb. 6 schematisch gezeigt. Der Deckel des Gefäßes bestand ebenfalls aus Vinidur. In diesen Deckel waren zwei Messingröhrchen senkrecht eingesetzt. In eines der Röhrchen konnte ein geeichtes und in Zehntel Grad Celsius geteiltes Thermometer bis auf den Boden des Meßgefäßes eingeführt werden. Durch das zweite dünnere Röhrchen tauchte ein Rührlöffel in die Flüssigkeit ein, um auch während der Messung die Flüssigkeit dauernd umrühren zu können. Diese Maßnahme verhindert das Auftreten eines Temperaturgefälles, das den Ultraschallstrahl aufspalten, bzw. ablenken könnte.

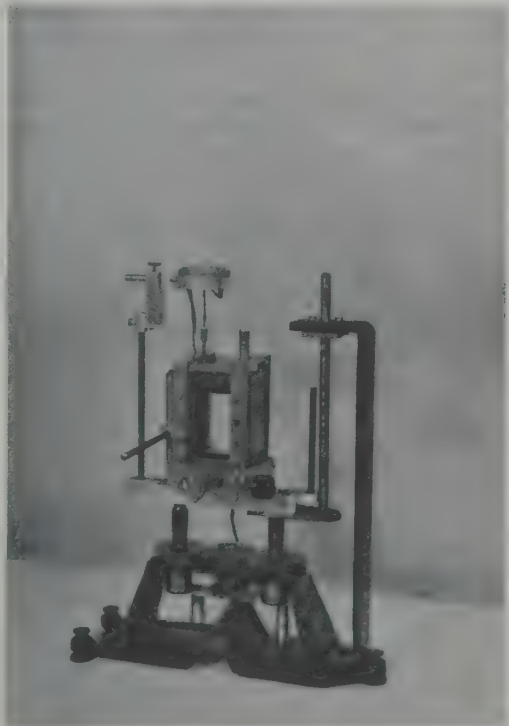


Abb. 5. Meßküvette mit Spindeltrieb, Rührmotor und Thermometer.

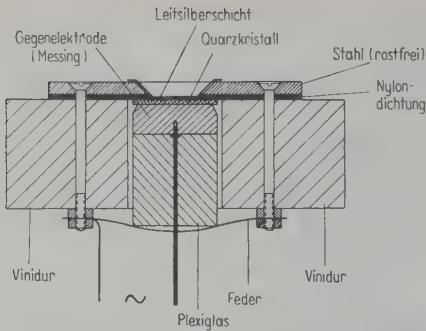


Abb. 6. Schnitt durch die in den Boden der Meßküvette einglassene Halterung für den Quarzkristall.

Da die Meßküvette bei den Messungen voll gefüllt wurde, war das Flüssigkeitsvolumen nahezu vollständig von der Atmosphäre abgeschlossen, so daß Diffusion von Luft in das Wasser hinein (besonders bei luftfreiem Wasser) verhindert werden konnte.

Ein Synchronmotor hob oder senkte über ein geeignetes Getriebe die ganze Küvette mit konstanter Geschwindigkeit (0,11 mm/s). Das Meßgefäß konnte zur Vorbereitung der Messungen aus der Apparatur herausgenommen werden.

γ) Kontrolle der Meßanordnung

Die Linearität der einzelnen Geräte und der gesamten registrierenden Apparatur (Photozelle, Resonanzverstärker, Pegelschreiber) wurde folgendermaßen kontrolliert: Die Intensität des Lichtstrahls wurde mit Hilfe von gegeneinander verdrehbaren Nicolschen Prismen zwischen den Linsen L_{1a} und L_{1b} des Linsensystems L_1 (Abb. 2) geändert. Bei eingeschalteter Hochfrequenz und Modulation wurde dann bei feststehendem Meßgefäß über Photozelle, Multiplier, Resonanzverstärker und Pegelschreiber die Anzeige des Pegelschreibers in Abhängigkeit vom Winkel zwischen den Polarisations Ebenen der Prismen und damit von der Lichtintensität I bestimmt.

Theoretisch gilt für die Lichtintensität hinter dem zweiten Nicolschen Prisma

$$I = I_0 \cos^2 \Theta, \quad (4)$$

wenn I_0 die Lichtintensität hinter dem ersten Prisma ist. Solange die Schallintensität konstant bleibt, ist dann die Intensität des Lichtes der ersten Beugungsordnung proportional zu der Lichtintensität I hinter dem zweiten Prisma, so daß auch die Spannung hinter dem Multiplier, bzw. hinter dem Verstärker proportional zu I ist. Es ergibt sich also für die Auslenkung des Pegelschreibers, die dem Logarithmus der angelegten Spannung proportional ist,

$$\frac{X}{dB} = A' - 40 \lg \cos \Theta \quad (5)$$

als Abhängigkeit von dem Winkel zwischen den Polarisations Ebenen der Nicolschen Prismen. Dabei ist A' eine Konstante. Die Auslenkung X in dB aufgetragen gegen $40 \lg \cos \Theta$ sollte also eine Gerade mit einer negativen Steigung von 45° gegen die x-Achse ergeben.

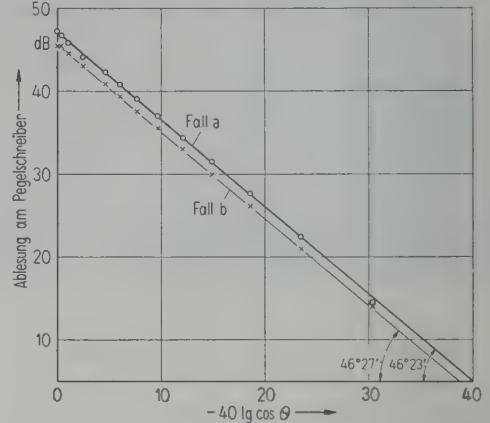


Abb. 7. Eichkurven der Registriereinrichtung der Apparatur. Θ = Winkel zwischen den Polarisations Ebenen der Nicolschen Prismen.

Fall a: Lichtstrahl dicht über dem Quarz.

Fall b: Abstand des Lichtstrahls vom Quarzkristall etwa 20 mm.

Bei der Kontrolle wurden zwei Meßreihen durchgeführt (Abb. 7). Im Fall a durchquerte der Lichtstrahl das Meßgefäß dicht über dem Quarz, im Fall b in einem Abstand von 20 mm. In beiden Fällen wurde die oben aufgestellte Gleichung (5) verhältnismäßig gut erfüllt. Im benutzten Intensitätsbereich war die Charakteristik der Photozelle eine Gerade, deren Steigung vom theoretischen Wert 45° etwas abweicht, im Fall a war $\beta = -46^\circ 23'$ und im Fall b war $\beta = -46^\circ 27'$.

c) Messung der Temperatur

Da die Temperatur sich während einer Messung (Heben und Senken des Meßgefäßes über die ganze Strecke) etwas änderte, wurde die Wassertemperatur am Beginn und am Ende jeder Messung auf $1/10^\circ \text{C}$ genau gemessen und der Mittelwert als Temperatur während der Messung genommen. Während einer Messung änderte sich die Temperatur in den meisten Fällen um weniger als $0,5^\circ \text{C}$.

d) Messung der Frequenz

Da die Absorption im allgemeinen dem Quadrat der Frequenz proportional verläuft, ist eine genaue Frequenzmessung erforderlich, um den

frequenzbezogenen Wert αf^{-2} zu bestimmen. Alle Frequenzmessungen wurden mit einem Frequenzmesser (Rohde & Schwarz, München, Type WIP, „Allwellen-Frequenzmesser“) ausgeführt, dessen relative Meßgenauigkeit bei normalen Messungen $\pm 0,8\%$ und bei Präzisionsmessungen $\pm 0,005\%$ beträgt. Die Frequenz wurde jeweils vor und nach einer Absorptionsmessung gemessen und der Mittelwert angegeben. Im allgemeinen veränderte sich die Frequenz während einer Messung nicht, wenn jedoch Änderungen auftraten, so lagen diese in der Größenordnung von 10^4 Hz

4. Vorbereitung der Wasserproben

a) Vorbemerkungen

Bei allen Messungen wurde destilliertes Wasser verwandt. Es wurden verschiedene Verfahren zur Reinigung des Wassers von Staubteilchen und anderen Verunreinigungen erprobt. Zum Beispiel wurde das Wasser mehrmals durch ein feines Papierfilter bzw. Glasfilter gesaugt. Schließlich wurden auch Versuche angestellt mit Wasser, das durch ein Filter von 1 Mikron Porengröße gesaugt worden war. Alle nach diesen Verfahren vorbereiteten Wasserproben zeigten unter sonst gleichen Bedingungen die gleiche Absorption.

b) Sättigung des Wassers mit Luft

Zur Anreicherung des Wassers mit Luft wurde über einen längeren Zeitraum staubfreie Luft in Form feiner Bläschen durch die Wasserproben gedrückt. Durch Variation dieser Zeit konnten verschiedene Sättigungsgrade erreicht werden. Um wirklich staubfreie Luft zu erhalten, wurde Luft aus einer Preßluftflasche durch ein mit Filterpapier und Watte gefülltes Glasrohr geleitet und durch eine Glasfritte in das Wasser gedrückt.

c) Entgasung des Wassers. Absorption von Luft durch entgastetes Wasser

Während die Sättigung des Wassers mit Luft verhältnismäßig einfach ist, bietet die Herstellung von luftfreiem Wasser und dessen Aufbewahrung oder weitere Verarbeitung besondere Schwierigkeiten. Die einzige Möglichkeit, luftfreies Wasser zu erhalten, scheint die Vakuumdestillation von reinem destilliertem Wasser zu sein¹. Nach der Destillation wurde das Wasser in

¹ Eine vollständige Beseitigung von Kohlendioxyd aus dem Wasser ist hierdurch jedoch nicht sichergestellt. Dies erfordert einen wesentlich größeren Aufwand. Die Untersuchung des Einflusses von im Wasser gelöstem Kohlendioxyd auf die Dämpfung muß einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

einem Gefäß unter Vakuum aufbewahrt. Luftfreies Wasser konnte auf diese Weise hergestellt werden, jedoch zeigten sich Schwierigkeiten bei der weiteren Verwendung. Schon beim Eingießen des Wassers in das Meßgefäß wurden größere Mengen von Luft absorbiert. Durch dreimaliges Umgießen erreichte zunächst luftfreies Wasser einen Sättigungsgrad von etwa 18% (bei 20 °C und 760 mm Hg). Dabei wurde das Wasser nicht mehr als fünf Minuten dem atmosphärischen Druck ausgesetzt. Aus den geschilderten Gründen wurde das Umfüllen des Wassers schließlich in der in Abb. 8 gezeigten Anordnung unter Vakuum vorgenommen.

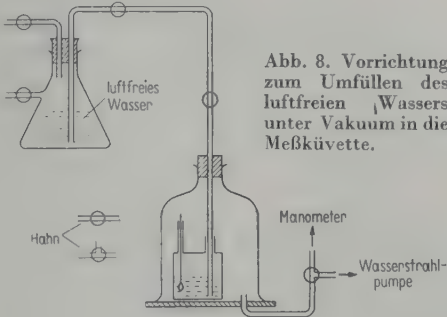


Abb. 8. Vorrichtung zum Umfüllen des luftfreien Wassers unter Vakuum in die Meßküvette.

Messungen des Luftgehaltes von zunächst luftfreiem Wasser, das unter Vakuum in die Meßküvette eingefüllt worden war, so daß diese vollkommen gefüllt war, und dann 90 Minuten dem atmosphärischen Druck ausgesetzt wurde, zeigten innerhalb der Meßgenauigkeit keine Erhöhung des Luftgehaltes. Dadurch erscheint die angewandte Verfahrensweise gerechtfertigt.

d) Messung des Luftgehaltes

Der Luftgehalt des Wassers wurde nach einer chemischen Methode gemessen, und zwar durch Austreibung der Luft mittels Kalilauge. Die untere Hälfte (Volumen = 100 cm³) des in Abb. 9 gezeigten Apparates zur Luftgehaltsbestimmung und das kalibrierte Röhrchen wurden mit einer gesättigten Lösung von KOH in destilliertem Wasser gefüllt. Die Wasserprobe, deren Luftgehalt zu bestimmen war, wurde dann sehr vorsichtig an der Wandung des Gefäßes entlang (um die Bildung von Luftblasen zu verhindern, die sich im Wasser lösen und seinen Luftgehalt verändern könnten) in die obere Hälfte des Apparates (Volumen = 100 cm³) bis an den Hahn eingefüllt. Durch den Glashahn wurde dann das Ganze abgeschlossen und durch Umkippen die KOH-Lösung mit der Wasserprobe gemischt. Dabei treibt die Kalilauge die im Wasser gelöste Luft aus. Diese sammelt sich in dem

kleinen Röhren mit Fünzigstel- cm^3 -Teilung. Während dieses Vorganges steigt die Temperatur und fällt der Druck in dem Apparat. Nach Kühlung und vorsichtigem Druckausgleich wird das Volumen der angesammelten Luft gemessen. Dies

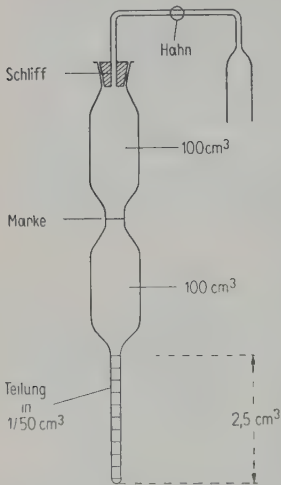


Abb. 9. Apparatur zur Luftgehaltsbestimmung.

entspricht dem Luftgehalt von 100 cm^3 Wasser.

Sollte der Luftgehalt von luftgesättigtem Wasser bestimmt werden, so wurde das Wasser, wie oben beschrieben, einfach bei Atmosphärendruck in die Apparatur hineingegossen. Handelte es sich jedoch um entgastes Wasser, so wurde dieses mit Hilfe der in Abb. 10 gezeigten Anordnung unter Vakuum umgefüllt.

Die praktisch erreichte Genauigkeit bei der Luftgehaltsbestimmung liegt bei 2 %.

Bei Messungen an luftgesättigtem Wasser wurden gewöhnlich zwei oder drei Luftgehaltsbestimmungen durchgeführt und der Durchschnitt genommen. Bei Messungen an luftfreiem Wasser konnte jeweils nur eine Messung des Luftgehaltes vorgenommen werden, da das Wasser für diese Messungen nur aus dem geringen Vorrat des Meßgefäßes entnommen werden konnte. Da aber in diesen Fällen jegliches Umfüllen unter Vakuum ausgeführt wurde, traten erfahrungsgemäß kaum Fehler in der Luftgehaltsbestimmung auf, und eine Messung wurde für ausreichend erachtet.

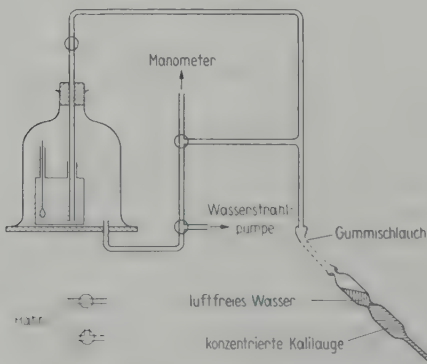


Abb. 10. Vorrichtung zum Umfüllen des Wassers in die Luftgehaltsmeßapparatur.

5. Durchführung der Meßreihen

Mit jeder Wasserprobe wurde eine zeitlich zusammenhängende, aus mehreren Einzelmessungen bestehende Meßreihe durchgeführt. Bei luftgesättigtem Wasser wurden bis zu zehn und mehr Einzelmessungen, jede aus einer Registrierung für Hin- und Rücklauf bestehend, hintereinander durchgeführt, da keine Gefahr bestand, daß sich der Luftgehalt auch innerhalb längerer Zeiten ändern würde. Der Durchschnitt aller für die einzelnen Messungen errechneten Absorptionswerte wurde als Absorption der Probe bezeichnet.

Bei luftfreiem Wasser wurde es als sicherer erachtet, die Messungen in einem Minimum an Zeit durchzuführen, um Änderungen des Luftgehaltes, denen diese Proben naturgemäß eher ausgesetzt waren, nach Möglichkeit zu verhindern. Aus diesem Grunde wurden bei einer Probe selten mehr als fünf Messungen durchgeführt. Dabei wurde wieder der Durchschnitt der für die einzelnen Messungen errechneten Absorptionswerte als Absorption der betreffenden Probe von luftfreiem Wasser genommen.

Die Tabellen IIIa und IIIb zeigen zwei typische Meßreihen mit einer Probe von luftgesättigtem Wasser und einer Probe von luftfreiem Wasser. Die Reduktion der Werte von αf^{-2} auf 20°C wurde mit Hilfe einer Kurve vorgenommen, die sich aus Messungen von PINKERTON [2] über die Temperaturabhängigkeit von αf^{-2} ergibt. Die Kurve a in Abb. 11 zeigt die Temperaturabhängigkeit von αf^{-2} in Tabelle IIIa und die Kurve b dieselbe für Tabelle IIIb.

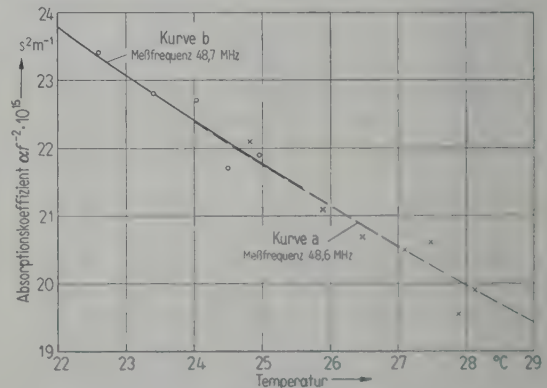


Abb. 11. Lage der Meßpunkte einer einzelnen Reihe von Absorptionsmessungen in Wasser zur Darstellung der Temperaturabhängigkeit.

Kurve a: Gehalt an gelöster Luft = $1,27 \text{ cm}^3$ in 100 cm^3 Wasser, d. h. 67,8 % des Sättigungswertes bei 20°C und 760 mm Hg (\times Meßpunkte, - - - Mittel der Messungen von PINKERTON [2]).
Kurve b: Gehalt an gelöster Luft = $0,112 \text{ cm}^3$ in 100 cm^3 Wasser, d. h. 6 % des Sättigungswertes bei 20°C und 760 mm Hg (\circ Meßpunkte, - - - Mittel der Messungen von PINKERTON [2]).

Tabelle IIIa. Absorptionsmessungen bei luftgesättigtem Wasser

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Nr.	mittlere Frequenz f	mittlere Temperatur T	mittlere Absorption α	$\alpha f^{-2} \cdot 10^{15}$	$\alpha f^{-2} \cdot 10^{15}$ reduziert auf 20 °C	Mittelwert $\alpha f^{-2} \cdot 10^{15}$ bei 20 °C	mögl. Fehler $\pm \sqrt{\frac{\sum \Delta_n^2}{n(n-1)}} \cdot 10^{15}$	Luftgehalt je 100 cm ³ Wasser	Sättigung
	MHz	°C	dB/m	s ² m ⁻¹	s ² m ⁻¹	s ² m ⁻¹			0/0
1	48,62	24,83	452,3	22,10	25,44	25,16	$\pm 0,1$ $\triangleq \pm 0,4 \%$	1,27 cm ³ bei 20 °C 760 mm Hg	67,8
2	48,57	25,90	432,0	21,10	25,08				
3	48,55	26,48	423,0	20,70	25,05				
4	48,60	27,10	418,5	20,50	25,15				
5	48,50	27,48	418,5	20,60	25,50				
6	48,60	27,88	400,5	19,55	24,72				
7	48,60	28,13	407,3	19,90	25,15				

Tabelle IIIb. Absorptionsmessungen bei luftfreiem Wasser

1	48,735	22,60	481,5	23,4	25,27	25,202	$\pm 0,11$ $\triangleq \pm 0,46 \%$	0,11 cm ³ bei 20 °C 760 mm Hg	6
2	48,735	23,40	477,0	22,8	25,14				
3	48,740	24,03	468,0	22,7	25,48				
4	48,740	24,50	445,5	21,7	24,80				
5	48,730	24,95	450,0	21,9	25,32				

6. Experimentelle Ergebnisse und ihre Genauigkeit

Abb. 12 zeigt die Temperaturabhängigkeit bei einigen Messungen im Bereich zwischen 20 und 28 °C bei einem Luftsättigungsgrad des Wassers zwischen 1,3 % Sättigung und 1,8 % Übersättigung. In Abb. 13 sind die Durchschnitte aller Absorptionsmessungen in von Grad zu Grad

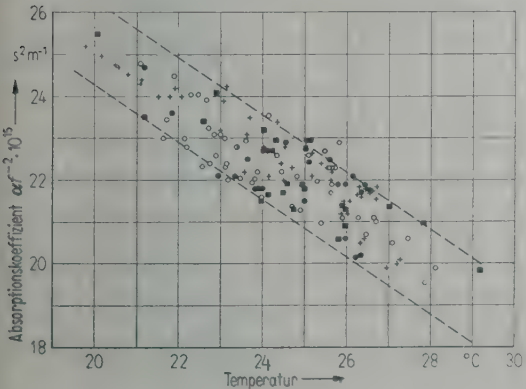


Abb. 12. Abhängigkeit der Ultraschallabsorption in Wasser von der Temperatur; mittlere Meßfrequenz 48 MHz.
■ Messungen bei Luftsättigungsgrad des Wassers bis 6 %.
● Messungen bei Luftsättigungsgrad des Wassers zwischen 6 und 26,3 %.
○ Messungen bei Luftsättigungsgrad des Wassers zwischen 26,3 und 50,6 %.
○ Messungen bei Luftsättigungsgrad des Wassers zwischen 50,6 und 101,8 %.
Die gestrichelten Linien geben die Streuung der Meßwerte an.

gestaffelten Temperaturbereichen in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Zum Vergleich ist eine aus den Messungen von PINKERTON [2] ermittelte Kurve eingezeichnet. Aus der Abb. 12 ist zu entnehmen, daß die Meßwerte für αf^{-2} über einen Bereich von zwei Einheiten der Ordinatenenteilung (10^{-15} s²/m) verteilt liegen. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache ergibt sich eine Meßgenauigkeit von etwa $\pm 3,9 \%$ für 20 °C. Es sei angemerkt, daß die in den vorliegenden Messungen erreichte Genauigkeit im allgemeinen größer ist als in anderen kürzlich bekannt gewordenen Arbeiten nach der Methode von DEBYE und SEARS (siehe SETTE [20]).

Abb. 14 zeigt die Abhängigkeit der Ultraschallabsorption von dem Gehalt an gelöster Luft, wie sie aus einigen Messungen bestimmt

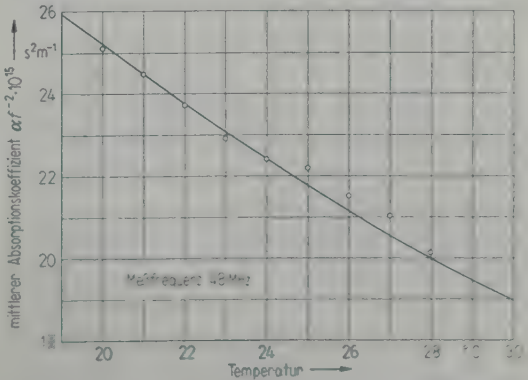


Abb. 13. Temperaturabhängigkeit der Ultraschallabsorption in Wasser; ○ Meßpunkte (gemittelt), — Mittel der Messungen von PINKERTON [2].

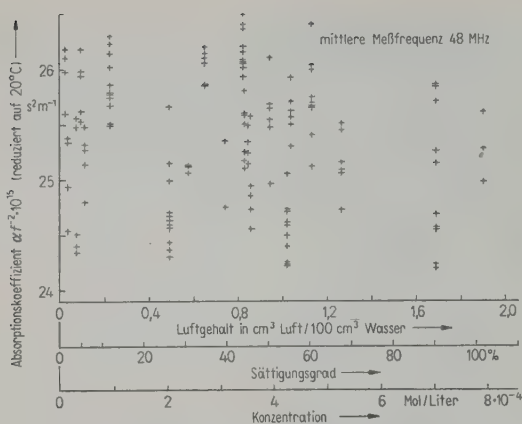


Abb. 14. Abhängigkeit der Ultraschallabsorption in Wasser vom Gehalt an gelöster Luft. Die Punkte dieser Abbildung sind aus denen der Abb. 12 durch Reduktion der Meßwerte auf 20 °C hervorgegangen. Senkrecht übereinander liegende Werte gehören jeweils zu einer Meßreihe. Alle drei Maßstäbe für den Luftgehalt sind auf 20 °C und 760 mm Hg bezogen.

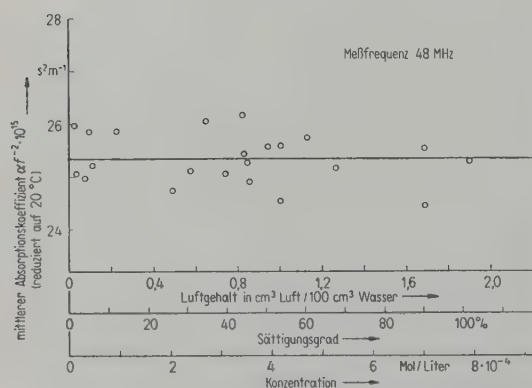


Abb. 15. Die Ultraschalldämpfung in Wasser in Abhängigkeit vom Gehalt an gelöster Luft. Alle drei Maßstäbe für den Luftgehalt sind auf 20 °C und 760 mm Hg bezogen. Die Kreise sind die Mittelwerte aus jeweils 2 bis 11 Messungen. Die Abhängigkeit der Ultraschalldämpfung in Wasser vom Luftgehalt des Wassers zeigt die ausgezogene Mittelkurve.

wurde. Dabei sind alle Werte nach PINKERTON auf 20 °C reduziert. Hiernach ist die in den einzelnen Meßreihen erreichte Genauigkeit im allgemeinen größer, als aus Abb. 12 folgt. Sie liegt zwischen $\pm 0,14\%$ und $\pm 2,7\%$.

Abb. 15 gibt die Abhängigkeit des auf 20 °C reduzierten mittleren Absorptionswertes vom Luftgehalt des Wassers.

7. Schlußfolgerungen

Die Schlußfolgerungen, die aus der vorliegenden Arbeit gezogen werden müssen, können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Die Absorption von Ultraschall in Wasser hat im Bereich zwischen 20 und 28 °C einen negativen Temperaturkoeffizienten, wie dies auch aus früheren Arbeiten schon bekannt war. Die hier gemessene Abhängigkeit der Absorption von der Temperatur steht in guter Übereinstimmung mit dem von PINKERTON [2], [3] im gleichen Temperaturbereich gefundenen Verlauf.

2. Die Anwesenheit von gelöster Luft im Wasser hat innerhalb der vorhandenen Meßgenauigkeit von $\pm 4\%$ keinen Einfluß auf die Ultraschallabsorption. Die Ultraschalldämpfung im Wasser bleibt unverändert, wenn man den Luftgehalt des Wassers zwischen 1 % und 102 % des Sättigungsluftgehaltes variiert.

3. Der auf das Quadrat der Frequenz bezogene Amplitudendämpfungskoeffizient αf^{-2} wird hier zu $25,3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ bei 20 °C bestimmt.

Diese Arbeit wurde im III. Physikalischen Institut der Universität Göttingen durchgeführt. Ich danke besonders Herrn Prof. Dr. E. MEYER, dem Direktor dieses Institutes, der mir nicht nur dieses Thema vorschlug, sondern mir auch alle Arbeitsmöglichkeiten in seinem Institut gab und ein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit zeigte. Ebenfalls danke ich Herrn Dr. K. TAMM für manchen guten Rat.

(Eingegangen am 20. Juli 1955.)

Schrifttum

- [1] WILLARD, G. W., J. acoust. Soc. Amer. **19** [1947], 235.
- [2] PINKERTON, J. M. M., Nature (London) **160** [1947], 128.
- [3] PINKERTON, J. M. M., Proc. Phys. Soc. B. **62** [1949], 129.
- [4] PANCHOLY, M., J. acoust. Soc. Amer. **25** [1953], 1003.
- [5] FOX, F. E. und ROCK, G. D., Phys. Rev. **70** [1946], 68.
- [6] SMITH, M. C. und BEYER, R. T., J. acoust. Soc. Amer. **20** [1948], 608.
- [7] STOKES, G. G., Trans. Camb. Phil. Soc. **8** [1845], 287.
- [8] HALL, L., Phys. Rev. **73** [1948], 775.
- [9] KNESER, H. O., Ergeb. exakt. Naturwiss. **22** [1949], 121.
- [10] GIERER, A. und WIRTZ, K., Z. Naturforsch. **5a** [1950], 270.
- [11] MEYER, E. und SKUDRZYK, E., Acustica **3** [1953], 434.
- [12] D'ANS, J. und LAX, E., Taschenbuch für Chemiker und Physiker, Springer-Verlag, Berlin 1949, S. 968.
- [13] HERBECK, M., Schallgeschwindigkeit in verdünnten wäßrigen Lösungen von Gasen und Säuren. Dissertation, Göttingen 1936.
- [14] MEYER, E., Sound absorption and sound absorbers in water. Dept. Navy, Bureau of Ships, Washington 25 DC, Bd. 1, S. 157.
- [15] KURTZE, G. und TAMM, K., Acustica **3** [1953], 33.
- [16] KURTZE, G., Dissertation, Göttingen 1951. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, **IIa** [1952], 57.
- [17] DEBYE, P. und SEARS, F. W., Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, **18** [1932], 409.
- [18] LUCAS, R. und BIQUARD, P., J. Phys. Radium **3** [1932], 464.
- [19] BIQUARD, P., C. R. Acad. Sci. **197** [1933], 309.
- [20] SETTE, D., Nuovo Cim. **6** [1949], 1 – 145.

ACCURACY OF MATCHING FOR BOUNDING SURFACES OF ACOUSTIC MODELS

by A. F. B. NICKSON and R. W. MUNCEY

Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia

Summary

Many workers have accepted the theory that an acoustic model can be made which will duplicate the acoustic behaviour of a given space. As perfect matching is physically impossible, a theoretical study has been made to show how much a small difference in impedance will affect the correlation, and conversely what differences in impedance are comparable with tolerances in the model measurement. Areas on a chart connecting acoustic impedance with certain parameters can be prescribed within which the acoustic impedance matching should be satisfactory, the area varying with the acceptable tolerances.

Sommaire

Il a été admis par beaucoup de chercheurs qu'il doit être théoriquement possible de réaliser un modèle acoustique reproduisant le comportement acoustique d'un espace donné. Comme une équivalence parfaite est physiquement impossible à obtenir, on montre dans la présente étude théorique l'influence que peut avoir sur la corrélation en question une petite différence entre les impédances, et inversement, quelle différence entre les impédances est compatible avec les tolérances admises dans les mesures sur maquette. On peut spécifier, sur un diagramme reliant l'impédance acoustique à certains paramètres, les zones à l'intérieur desquelles l'équivalence est satisfaisante au point de vue impédance, la configuration de ces zones dépendant des tolérances admises.

Zusammenfassung

Es wird vielfach von der Theorie Gebrauch gemacht, nach der man das akustische Verhalten eines gegebenen Raumes durch ein akustisches Modell nachbilden kann. Da eine vollkommene Anpassung hinsichtlich der Wandimpedanzen physikalisch unmöglich ist, wurde eine theoretische Untersuchung durchgeführt, um festzustellen, inwieweit eine geringe Abweichung in der Impedanz die Beziehungen zwischen Modell und Original beeinflusst, bzw. welche Impedanzabweichungen mit vorgegebenen Abweichungen im Modellversuch vergleichbar sind. Aus einem Diagramm läßt sich entnehmen, in welchem Bereich, je nach den zugelassenen Modellfehlern, eine befriedigende Impedanzanpassung zu erwarten ist.

1. Introduction

Acceptance of the theory that an acoustic model can be made that will duplicate the acoustic behaviour of a given space is implicit in the work of many experimenters. MUNCEY [1], discussing the theory of models, showed that for exact matching the shapes should be identical and the impedance of the surface over corresponding areas should be the same, due regard being paid to the difference in frequencies.

Obviously perfect matching is physically impossible—some tolerance must be allowed on the accuracy of the dimensions of the model, inaccuracies must be expected in the measurement of impedance even presuming no conflict between the methods adopted for the measurement at the two frequencies and moreover, neither the full-size nor the model surfaces can be expected to have an impedance unvarying over an apparently unchanged surface. The accuracy of scaling need not be considered here

since it will depend on the structure being modelled, the constructional method used and the care and expense involved.

This study is intended to show how much a small difference in impedance will affect the correlation and conversely what differences in impedance are comparable with tolerances in the model measurements. In the first place, the effects of a slightly different impedance on a sound wave after one reflection will be considered and the cumulative effect after a number of reflections derived by approximation. For reasons discussed later, it is impractical to consider any experimental confirmation but the results obtained will be compared with the theory of the transmission characteristic method for measuring impedances, the experimental background of which is fairly well established.

Acoustic waves in any space are reflected whenever they strike a surface and satisfactory correlation between a true and actual model will

be achieved when it is impossible to detect, to the order of accuracy required, the difference between the waves reflected from the two models. The sound at a point can then be considered to have resulted from a source and a succession of reflections and, if all surfaces are matched so that the wave after each reflection in the actual model cannot be detected to be different from the equivalent wave in the true model, the actual model will satisfactorily duplicate the true model. The basic single-reflection relation will be examined first and its validity checked by comparison with established theory of impedance measurement.

2. Single reflection

Consider a surface in an acoustic model which, if accurately representative of its full-scale counterpart, would have a specific acoustic impedance ζ . Suppose that in fact the surface in the model has an impedance ζ_1 , and that it is a distance ξ behind the correct position. Choose perpendicular axes x, y, z so that the true surface lies in the (y, z) plane, the air is on the positive x -side and the representative sound wave considered later lies in the (x, y) plane.

Assume that a plane wave is incident on the surface at an angle Φ . Such a wave can be considered as representative of all waves except those in which the curvature of the wave-front or the extent or curvature of the surface is not fairly large compared with the wavelength of the sound. If the pressure p_A of the sound wave at $A(x_1, y_1)$ be $p_A = p \exp(-2\pi i \nu t)$ the pressure p_R of the wave at $R(x, y)$ having been reflected from the correct model surface ζ in the plane $x=0$ will be [2]

$$p_R = p \exp \left[-2\pi i \nu t - 2\pi(\alpha - i\beta) + \frac{2\pi i \nu}{c} (x + x_1) \sec \Phi \right]$$

wherein p is a constant,
 ν is the frequency of the sound,
 t is the time,
 c is the wave velocity,

and

$$\tanh[\pi(\alpha - i\beta)] = \zeta \cos \Phi.$$

For reflection from the actual model surface ζ_1 at $x = -\xi$ the sound pressure p_{R_1} at R will be

$$p_{R_1} = p \exp \left[-2\pi i \nu t - 2\pi(\alpha_1 - i\beta_1) + \frac{2\pi i \nu}{c} (x_1 - x - 2\xi) \sec \Phi \right].$$

The ratio of the pressures of the two reflected waves will be

$$\frac{p_{R_1}}{p_R} = \exp \left[2\pi(\alpha - \alpha_1) - 2\pi i(\beta - \beta_1) + \frac{4\pi i \nu}{c} \xi \sec \Phi \right].$$

In this ratio the factor $\exp[2\pi(\alpha - \alpha_1)]$ is concerned with magnitude and the remainder with phase.

Suppose now that it be decided that a proportional error ε in the reverberation time, the bandwidth of resonant peaks and other related phenomena should be accepted. Each reflection should contribute an error no larger than its proportional effect. In this reflection the change in magnitude is $17.36 \pi \alpha$ dB, $(20 \log_{10} e \cdot 2\pi \alpha)$, and the error $17.36 \pi (\alpha - \alpha_1)$ dB. The acceptable error is $17.36 \pi \alpha \varepsilon$ dB whence $|\alpha - \alpha_1|/\alpha \leq \varepsilon$. Hence, provided all surfaces are matched so that in no case does $|\alpha - \alpha_1|/\alpha$ exceed ε , the overall proportional error in the reverberation time and related phenomena will likewise not exceed ε .

The change in phase of the reflected wave due to inaccuracy of impedance matching and position depends on the factor

$$\beta - \beta_1 - \frac{2\nu}{c} \xi \sec \Phi.$$

A reasonable criterion for $\beta - \beta_1$ would be to require its effect not to exceed that of ξ , the positional error.

Now the value ξ cannot be accurately determined but is commonly expressed as a proportion h of the corresponding dimension of the model L_x , i.e. $\xi = h L_x$. The condition then reduces to

$$|\beta - \beta_1| \leq |\eta_x h \sec \Phi|$$

where

$$\eta_x = 2 L_x \nu / c.$$

3. Standing waves

Experimental confirmation of this theory, although obviously desirable, does not appear to be practicable. Any work would have to be concerned with cases wherein ε was 0.1 or less and $h = 0.01$. It would be necessary to use experiments of a type suitable for measuring impedance, and to achieve the necessary accuracy in measurement of ζ and ζ_1 suitable for the particular case an almost identical arrangement for both measurement and experimental test would be required. Such a test would be merely arguing in a circle and the matter really checked would be the background assumptions involved in the impedance measuring method.

In this situation it is probably far better to check how relations for other cases derived from the wave acoustic theory compare with those given above. This has been done here for the case of impedance measurement by the transmission characteristic method [3], [4] as this is probably the most closely allied to normal use of materials, but it can similarly be shown with the impedance tube theory¹.

The transmission characteristic method envisages a rectangular parallelepiped chamber with five walls infinitely hard (or approaching it) and the sixth wall that being tested. Eigentones are considered separately. The previous workers have shown that the bandwidth k of a resonance peak is given by

$$\mu_x \kappa_x = \eta_x^2 k / \nu,$$

wherein μ_x, κ_x are constants depending on ζ , and

$$\eta_x = 2 L_x \nu / c$$

where L_x is the x -dimension of the chamber, and that the eigentone frequency differs from that with an infinitely hard test surface by $\Delta \nu$ where

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{n_x^2 - (\mu_x^2 - \kappa_x^2)}{2 \eta_x^2}.$$

With the approximations given in the Appendix (which involve only the assumptions made by HARRIS [3]) these can be easily transformed to

$$k = \frac{n_x \nu}{\eta_x^2} \cdot \alpha$$

whence

$$\frac{k_1 - k}{k} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha}$$

and

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{(n_x - \mu_x) n_x}{\eta_x^2}$$

whence

$$\frac{\Delta \nu_1 - \Delta \nu}{\nu} = (\beta_1 - \beta) \frac{\cos \Phi}{\eta_x}$$

since

$$\cos \Phi = n_x / \eta_x.$$

These equations correspond exactly with those derived from the study of the single reflection.

4. Pressures in standing waves

The preceding sections have been primarily concerned with correct frequencies and decay phenomena and it is possible that even if these be correct the relative pressures at various points might be inadequately represented. Because of mathematical complications the rectangular parallelepiped is the only shape commonly consid-

ered and treatment here will be limited to this shape with all walls except that being considered infinitely hard.

The distribution of pressure in a rectangular space is [5] $P = D(x) \cdot E(y) \cdot F(z)$ where

$$D(x) = \cosh \left(\frac{-\pi x \kappa_x}{L_x} + i \frac{\pi x \mu_x}{L_x} + \psi_x \right)$$

with similar expression for E and F .

For the case considered here, this simplifies to

$$P = \cosh \left(\frac{-\pi x \kappa_x}{L_x} + i \frac{\pi x \mu_x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{\pi n_y y}{L_y} \right) \times \cos \left(\frac{\pi n_z z}{L_z} \right)$$

the change in suffix denoting the equivalent parameter of the new axis. The change in pressure due to any inaccuracy of matching the surface will fairly obviously vary over the volume but for a pressure maximum will be greatest near the absorbing surface. Assuming that $(\mu - n)$ is small compared to $(\mu + n)$, the ratio of the square of the pressure in the two cases is the ratio of the values of

$$1 + \frac{\left(\frac{\eta_x}{n_x} \cdot \frac{\cos \varphi}{|\zeta|} \right)^2}{1 + \frac{2 \eta_x}{\pi n_x^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{|\zeta|}}$$

in which

$$\zeta = |\zeta| \exp(-i\varphi).$$

The maximum value of this ratio is obviously

that when $\frac{\eta_x}{n_x} \cdot \frac{\cos \varphi}{|\zeta|}$ is large and $\sin \varphi / |\zeta|$ is zero.

The ratio will then be the same as the ratio of the square of α , since α is approximately $\frac{\cos \varphi}{\pi |\zeta| \cos \Phi}$.

At a pressure minimum the equivalent factor is

$$\left(\frac{2 n_x - 1}{2 n_x} \cdot \frac{\eta_x}{n_x} \cdot \frac{\cos \varphi}{|\zeta|} \right)^2$$

and again the ratio in the two cases cannot exceed the ratio of the square of α in the two cases.

The assumption that this is the maximum change possible is not completely justified since in many acoustical fields cancellation effects occur at particular points and frequencies. For instances in which the full-size hall will be used by listeners in the normal way (i. e. except when precise physical measurements are required) such effects with cancellations are not likely to matter, particularly as a recent study [6] has shown that sounds more than a few dB below the general level are not important. It is fairly simple to construct a table relating the per-

¹ This study in reverse gives a measure of the accuracy of deductions of impedance from measurements in a specific setup.

missible error ε in α , the maximum ratio in dB between the intensity at a point in a standing wave in the true and actual model and the ratio in dB between the levels of the two sounds and the maximum intensity when cancellation effects occur, assuming a change in one only of the two sound fields involved. Such a table, based on a model surface with $\alpha = 0.08$ (statistical absorption coefficient about 0.80) is given in Table I.

Table I

Error ε in α	Intensity ratio (maximum error)	Level of maximum cancellation effect
	dB	dB
0.01	0.06	-18.3
0.02	0.13	15.3
0.05	0.32	-11.3
0.10	0.60	- 8.3
0.20	1.12	5.3

Bearing in mind that these ratios represent the maximum errors to be expected, it would appear that the error in intensity is far less critical than the errors in α , i. e. in reverberation time and related phenomena.

5. Discussion

The various requirements can be grouped as follows:

1. The ratio of α for the true and actual models should differ from unity by less than the errors in the measurement of the bounding surfaces, the accuracy required in bandwidth, reverberation time and pulse amplitude measurements. The condition is $|\alpha_1 - \alpha|/\alpha \leq \varepsilon$ where ε is the acceptable error in reverberation time, etc.
2. The shift in frequency or phase introduced by a surface should not exceed the tolerance on the accuracy of scaling of the model. This requires $|\beta - \beta_1| \leq |\eta_x h \sec \Phi|$.
3. The ratio of α for the true and actual model should differ from unity by an amount small enough to keep pressure changes insignificant. It seems likely that if criterion 1 be satisfied, criterion 3 will also be satisfied.

Whether or not a certain impedance gives a satisfactory matching will, of course, depend on the particular circumstances. Consider the case of a hall. The total absorption in a hall depends very largely on the absorption of the audience and an error as large as 10 or even 20 per cent could be expected in this value (even assuming

the number in the audience be known). It would seem then that an accuracy of better than 10 per cent is unwarranted and this would reflect in possible errors of 10 per cent in a bandwidth of resonance peaks, reverberation time and pulse amplitude decay, of about 0.8 dB in pressure measurements and pressure troughs limited to about -7 dB. This would probably be sufficiently accurate in all these measurements. Again, the dimensional tolerance of the model cannot reasonably be expected to be less than 1 per cent since the position of the audience can hardly be defined to better than 20 cm in the vertical direction and a hall height of 20 m would be quite large. For frequencies from say 70 c/s and upward the value of η would exceed 4 and consequently the change in the factor $(\beta - \beta_1) \cos \Phi$ could be as much as 4 per cent without introducing excessive error. The greater the frequency the greater will be the allowable error in β . Fig. 1 gives the relation between $|\zeta| \cos \Phi$, φ , α and β , and indicates for a surface whose impedance is given by $|\zeta| \cos \Phi = 11$, $\varphi = -44^\circ$, the area in which the impedance matching is satisfactory for the conditions $\varepsilon = 0.10$, $\eta = 4$ and $h = \pm 0.005$. However, as it is more usual to consider the impedance as being constant with angle of inci-

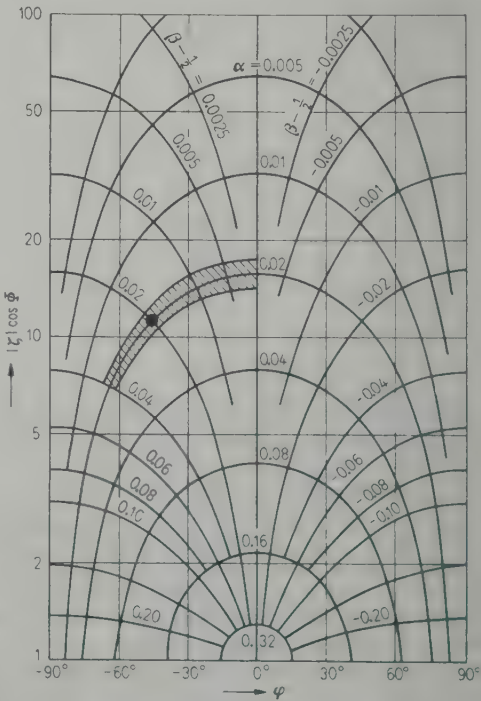


Fig. 1. Transformation from specific impedance $|\zeta| \cos \Phi$ and angle of incidence Φ to parameters α, β . Area hatched is matching area for $|\zeta| = 11$, $\varphi = -44^\circ$, $\cos \Phi = 1$, $\eta = 4$, $\varepsilon = 0.10$ and $h = \pm 0.005$.

dence, the practical problem is to match an impedance $|\zeta|=11$, $\varphi=-44^\circ$, for various angles of incidence. Since $|\zeta|\cos\Phi$ varies with angle of incidence there are a number of areas, one for each incident angle considered, which are similar in shape and parallel unless $|\zeta|\cos\Phi$ approaches unity. It should therefore be satisfactory to match a room surface with a model surface having an impedance represented in the area shown in Fig. 1, but aiming to make the phase angle of the model surface as close to that of the room as possible in the case of soft surfaces and grazing incident waves.

In making a model of a particular space, some further relaxation on the conditions for the acoustically harder areas seems reasonable. For instance, a small area of hard material which contributed perhaps less than one per cent of the total absorption could reasonably have a greater tolerance than a large area of soft material which contributed most of the absorption. There is no rigorous method for fixing the difference in matching accuracy required, although on first sight it would probably be adequate to have the total absorption within a few per cent of the accurate value.

Finally it should be recalled that only waves in which the curvature of the wavefront, or the extent or curvature of the surface, is large compared with the wavelength of sound have been considered. However, it seems unlikely that any serious errors will be introduced in cases of non-plane waves, or of architectural features of dimensions comparable with the wavelength, if the model surfaces are fixed on the bases derived in this paper.

6. Conclusions

Precise matching of the specific acoustic impedance of the surfaces of an acoustic model with the corresponding ones in the original space is neither possible nor necessary. Areas on a chart connecting acoustic impedance with certain parameters can be prescribed within which the acoustic impedance matching will be satisfactory; the area obviously varies with the acceptable tolerances. One pair of boundaries is formed by points of constant absorption; the other pair by points in which the change in frequency of a particular eigentone is equal to the scale tolerance of the model.

Appendix

When a plane wave is reflected from an absorbing wall of specific acoustic impedance ζ

$|\zeta|\exp(-i\varphi)$ at an incident angle Φ , its incident pressure wave P_i and the reflected pressure wave P_r can be expressed as:

$$\frac{P_i - P_r}{P_i + P_r} = \tanh[\pi(\alpha - i\beta)] = \zeta \cos \Phi$$

from which it may be shown that

$$|\zeta \cos \Phi| = \sqrt{\frac{\cosh 2 \pi \alpha - \cos 2 \pi \beta}{\cosh 2 \pi \alpha + \cos 2 \pi \beta}} \tag{1}$$

and

$$\tan \varphi = \frac{\sin 2 \pi \beta}{\sinh 2 \pi \alpha}.$$

Curves of constant α and constant β may then be calculated for the $|\zeta|\cos\Phi-\varphi$ plane. For the standing wave case HARRIS has shown that

$$\zeta = -i\pi\eta \frac{\coth W}{W}$$

where

$$W = -\pi\kappa + i\pi\mu$$

from which it may be further shown by a conformal transformation that

$$\frac{|\zeta|}{\eta} = \sqrt{\frac{\cosh 2 \pi \kappa + \cos 2 \pi \mu}{(\mu^2 + \kappa^2)(\cosh 2 \pi \kappa - \cos 2 \pi \mu)}},$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin 2 \pi \mu}{\sinh 2 \pi \kappa} - \frac{\kappa}{\mu}.$$

Introducing the approximations (which are true for all but very soft surfaces and grazing angles of incidence),

$$\mu \gg \kappa, \quad \mu \approx n, \quad \cos \Phi \approx n/\eta$$

$$|\zeta \cos \Phi| = \sqrt{\frac{\cosh 2 \pi \kappa + \cos 2 \pi \mu}{\cosh 2 \pi \kappa - \cos 2 \pi \mu}} \tag{2}$$

and

$$\tan \varphi = \frac{\sin 2 \pi \mu}{\sinh 2 \pi \kappa}.$$

Equations (1) and (2) can then be shown to be identical using the substitutions

$$\alpha = \kappa, \quad \beta = \frac{1}{2} = n - \mu.$$

(Received 5th July, 1955.)

References

- [1] MUNCEY, R. W., The use of three dimensional models in room acoustics. *J. acoust. Soc. Amer.* **20** [1950], 510.
- [2] MORSE, P. M., *Vibration and sound*; 2nd ed. McGraw-Hill Book Co., New York 1948.
- [3] HARRIS, C. M., Application of the wave theory of room acoustics to the measurement of acoustic impedance. *J. acoust. Soc. Amer.* **17** [1945], 35-45.
- [4] NICKSON, A. F. B. and MUNCEY, R. W., Acoustic impedance measurement by the transmission-characteristic method. *Acustica* **3** [1953], 192-198.
- [5] MORSE, P. M. and BOLT, R. H., Sound waves in rooms. *Rev. mod. Phys.* **16** [1944], 69-150.
- [6] NICKSON, A. F. B. and MUNCEY, R. W., Frequency irregularity in rooms. *Acustica* **5** [1955], 44-46.

DIE BEDEUTUNG DER FREQUENZGRUPPE FÜR DIE LAUTHEIT VON KLÄNGEN

von H. BAUCH

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtentechnik der Technischen Hochschule Stuttgart

Zusammenfassung

Die aus zahlreichen anderen Hörversuchen bekannte Breite der Frequenzgruppe tritt auch bei der Untersuchung der Gesetze, nach denen das Gehör die Lautheit von Klängen bildet, als deutliche Grenze in Erscheinung. Fällt das gesamte Spektrum in die gleiche Frequenzgruppe, so beurteilt das Gehör die Lautstärke einfach nach der dargebotenen Leistung. Das Gehör kann Schwankungen der Leistung folgen, die mit einer niedrigeren Frequenz als etwa 3 Hz verlaufen. Als Lautstärke wird der Höchstwert dieser schwankenden Leistung empfunden. Ist das Frequenzband breiter als eine Frequenzgruppe, so ergibt sich die Lautheit als die Summe der in den einzelnen Frequenzgruppen gebildeten Lautheiten.

Summary

The 'breadth of a frequency group', well-known in other researches on hearing, intervenes as a practical limit also in the investigation of the laws by which the ear estimates the loudness of a complex sound. If the whole spectrum falls in the same frequency group, the ear judges the loudness from the total intensity presented. The ear can follow fluctuations in intensity at a slower rate than about 3 c/s. The peaks in such fluctuations determine the loudness level. If the frequency band is wider than a single frequency group the loudness is given by adding the loudness in the several groups.

Sommaire

La largeur du groupe de fréquence, qui est bien connue d'après les résultats d'autres mesures nombreuses, intervient aussi comme limite nette dans l'étude des lois suivant lesquelles l'ouïe forme l'intensité d'audition des bruits. Si tout le spectre se trouve dans le même groupe de fréquence, l'ouïe ne perçoit l'intensité d'audition que d'après la puissance fournie. L'ouïe peut suivre des oscillations de la puissance ayant une fréquence inférieure à 3 Hz. L'intensité perçue est alors l'amplitude maxima de la puissance oscillante. Si la bande de fréquence est plus large qu'un groupe de fréquences, l'intensité d'audition est la somme des intensités d'audition relatives aux différents groupes de fréquence.

1. Einleitung

Die Gesetze, nach denen das Gehör die Lautheit eines Tongemisches aus mehreren reinen Tönen bildet, haben H. FLETCHER und W. A. MUNSON [1] untersucht. Als Ergebnis der Untersuchungen wurde ein Rechenverfahren angegeben, das die Gesamtlautheit einer größeren Anzahl von Sinustönen zu berechnen gestattet. Danach muß man aus den Lautheitskurven die Lautheit eines jeden Teiltones ermitteln und diese Werte addieren. Die Summe ergibt die Lautheit des gesamten Schallereignisses. Dieses Gesetz gilt, wenn die Teiltöne einen „genügend großen“ Frequenzabstand haben. Nahe benachbarte Töne sollen nicht als Einzeltöne bewertet werden. Die Leistung ist vielmehr innerhalb bestimmter Frequenzbänder, „limiting bands“ genannt, zusammenzufassen und in der weiteren Rechnung wie die Leistung eines Tones in gleicher Frequenzlage zu behandeln.

Andererseits ist bekannt, daß man beim Anhören mehrerer dicht benachbarter Töne Schwebungen hört. Hier gelten sicher andere Gesetze

als die oben angegebenen. Schließlich hat sich bei der Messung der Lautheit von Ausschnitten aus weißem Rauschen [2] gezeigt, daß eine bestimmte Bandbreite, die wir Frequenzgruppe nennen, und die auch bei anderen Messungen [3], [4], [5] in Erscheinung trat, eine entscheidende Rolle spielt.

Um eine Aussage über die Lautheit eines Tongemisches bei jedem beliebigen Frequenzabstand zu erhalten, soll im folgenden die Lautstärke von drei Sinustönen in Abhängigkeit von Frequenzabstand, Tonhöhe und Phasenlage der Teiltöne untersucht werden.

2. Versuchsanordnung

Die Aufgabe ist zunächst, drei Sinustöne herzustellen, die ein Amplitudenspektrum gemäß Abb. 1 ergeben. Dabei soll die Phasenlage der Schwingungen gegeneinander einstellbar sein. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Abstände $f_o - f_m$ und $f_m - f_u$ untereinander gleich sind. Ferner sollen die Schwingungen der Frequenzen f_o und f_u gleiche Amplitude haben.

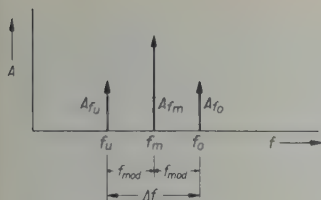


Abb. 1. Amplitudenspektrum dreier kohärenter Töne.

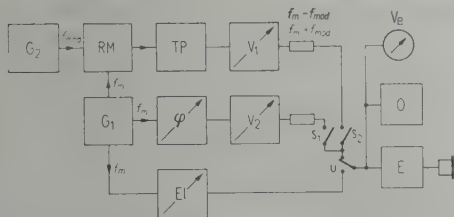


Abb. 2. Versuchsanordnung zur Messung der Lautstärke von drei Tönen.

Wir erfüllen diese Forderungen mit Hilfe der in Abb. 2 gezeigten Anordnung. Die Generatoren G_1 und G_2 erzeugen Sinusspannungen der Frequenz f_m bzw. f_{mod} , die im Ringmodulator RM überlagert werden. Am Ausgang des Tiefpasses TP, der die höheren Modulationsprodukte aussiebt, erscheinen die Linien der Frequenz $f_u = f_m - f_{mod}$ und $f_o = f_m + f_{mod}$ mit gleicher Amplitude. Hinter dem regelbaren Verstärker V_1 wird eine Spannung der Frequenz f_m zuge setzt. Sie wird, ebenso wie die Trägerspannung am Ringmodulator RM, dem Generator G_1 entnommen, ist also in der Phase starr mit den beiden Seitenlinien f_u und f_o gekoppelt. Das Phasendrehglied φ und der Verstärker V_2 gestatten, Amplitude und Phase dieser Spannung zu regeln.

Die Ausgangsspannungen der Verstärker V_1 und V_2 werden schließlich addiert und über den Entzerrer E [6] einem dynamischen Kopfhörer zugeführt.

Die Spannung am Eingang des Entzerrers E besteht also nun aus drei Sinusspannungen der Frequenzen f_u , f_m und f_o . Das Zeigerbild dieser Summe ist in Abb. 3 dargestellt. Man ersieht daraus, daß alle Forderungen, die wir zu Anfang dieses Abschnittes gestellt hatten, erfüllt

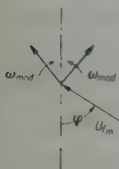


Abb. 3. Zeigerbild dreier kohärenter Töne.

sind: Das Spektrum weist drei Linien auf, die Abstände $f_o - f_m$ und $f_m - f_u$ sind beide gleich f_{mod} , die Amplituden der Linien f_o und f_u sind gleich, der Winkel φ ist beliebig einstellbar, ebenso das Verhältnis der Amplitude der Seiten schwingungen zur Amplitude des Trägers.

Mit Hilfe des Effektivwertmessers V_e wird der Effektivwert der Spannung am Eingang des Ent-

zerrers E gemessen. Die Schalter S_1 und S_2 ermöglichen auch, die vom Verstärker V_1 oder die vom Verstärker V_2 herrührende Spannung getrennt zu messen. Damit ist der Effektivwert jeder der drei Teilschwingungen bestimmbar. Im Oszillographen O kann der zeitliche Spannungsverlauf am Eingang des Entzerrers beobachtet werden.

3. Meßmethode

Zur Messung der Lautstärke kommt grundsätzlich nur eine Vergleichsmethode in Frage. Die Lautstärke eines Schallereignisses wird bekanntlich als der Pegel des gleich laut erscheinenden 1000-Hz-Tones definiert. Folglich mißt man die Lautstärke auch meist durch direkten Vergleich der Lautstärke des zu untersuchenden Schallereignisses mit der eines 1000-Hz-Tones. Im vorliegenden Fall verfahren wir etwas anders. Wir verwenden als Vergleichsnorm einen Ton der Frequenz f_m . Das hat den Vorteil, daß das Schallereignis, dessen Lautstärke bestimmt werden soll, und der Vergleichston gleiche Tonhöhe haben. Das Einstellen auf „gleich laut“ wird dadurch sehr erleichtert, die Meßunsicherheit ist viel geringer als bei direktem Vergleich mit einem 1000-Hz-Ton. Die Ordinaten der Diagramme sind also mit dem Pegel des gleich lauten Tones der Frequenz f_m , nicht wie üblich in phon beziffert. Nur bei $f_m = 1$ kHz stellt die Bezifferung der Ordinate direkt die Lautstärke dar. Bei den anderen verwendeten Mittenfrequenzen ist der Unterschied zwischen der Lautstärke in phon und dem Pegel des Bandmittentones gering.

Die Diskussion der Meßergebnisse wird zeigen, daß es auch aus Gründen der Anschaulichkeit der Darstellung in diesem Fall zweckmäßiger ist, nicht die Lautstärke direkt aufzutragen.

Dem Beobachter wird zunächst das Tongemisch, dessen Lautstärke bestimmt werden soll, dargeboten. Darauf betätigt er von Hand den Umschalter U und hört darauf den Vergleichston, dessen Lautstärke mit Hilfe der Eichleitung El eingestellt werden kann. Es steht dem Beobachter also frei, in welchem Rhythmus er die Umschaltung vom Vergleichston zum Dreiklang und umgekehrt vornehmen will. Das hat sich bei dieser Art von Messungen besser bewährt als automatisches Umschalten, da der Lautstärkenvergleich bei den einzelnen Meßpunkten verschieden schwierig ist. Insbesondere benötigt man längere Zeit, sich in den Dreiklang einzuhören, als es zur Beurteilung der Lautstärke des Vergleichstones erforderlich ist. Das gilt besonders dann, wenn der Linienabstand f_{mod} groß wird.

Das Einstellen auf „gleich laut“ nimmt man am besten in der Weise vor, daß man zunächst einen Vergleichston einstellt, der sicher etwas leiser ist als das zu messende Schallereignis, darauf einen, der sicher etwas lauter ist. So kann man den Pegel des „gleich lauten“ Vergleichstones auf ± 3 dB eingrenzen.

Um zu verhindern, daß der Beobachter von vornherein bestrebt ist, an der Eichleitung den vermutlich richtigen Wert einzustellen, schaltet man noch eine zweite Eichleitung zu, an der man bei jedem Meßpunkt eine andere, dem Beobachter unbekannte Dämpfung einstellt, so daß er gezwungen ist, jeden Punkt „blind“ einzustellen.

4. Meßergebnisse

Die Kurven der Abb. 4 zeigen die Ergebnisse der Messung, die Lautstärke der drei Sinustöne, deren Amplitudenspektrum in Abb. 1 und deren Zeigerbild in Abb. 3 dargestellt ist, in Abhängigkeit vom Linienabstand f_{mod} , bzw. der Bandbreite $\Delta f = 2 f_{mod}$ für vier verschiedene Bandmittelfrequenzen f_m . Parameter sind der effektive Schalldruckpegel L der drei Töne zusammen, die Mittenfrequenz f_m , der Phasenwinkel φ und das Verhältnis der Amplitude der Seitenschwingungen zur Trägeramplitude $m = 2 A_{fu}/A_{fm} = 2 A_{fo}/A_{fm}$. Man überzeugt sich leicht, daß durch die Größen f_{mod} , f_m , L , φ und m das Schallereignis eindeutig beschrieben wird.

Die Kurven in Abb. 4 lassen deutlich drei Bereiche erkennen:

1. Die Modulationsfrequenz ist kleiner als etwa 3 Hz, d. h. unterhalb der Grenze des zeitlichen Auflösungsvermögens des Gehörs;
2. die Modulationsfrequenz liegt oberhalb 3 Hz, aber die gesamte Bandbreite $\Delta f = 2 f_{mod}$ ist kleiner als die Breite Δf_G der Frequenzgruppe;
3. die Bandbreite ist größer als Δf_G .

Im letzten Fall, wenn also die Modulationsfrequenz so groß ist, daß die Bandbreite $\Delta f = 2 f_{mod} > \Delta f_G$ wird, bildet das Gehör, wenigstens bei nicht zu hohem Pegel, die Lautheit durch Addition der Lautheiten der drei Teiltöne. Mit Hilfe der in der Arbeit [2] angegebenen gemittelten Isophonen und Lautheitskurven wurde die Lautheit für einige Punkte berechnet und, wiederum aus den Isophonen, der Pegel des gleich lauten Bandmittentones bestimmt. Die ermittelten Werte sind als Kreuze in die Diagramme eingetragen. Sie stimmen bis zu einem Pegel von etwa 45 dB innerhalb der Meßgenauigkeit von ± 3 dB gut mit den Meßpunkten überein. Die Verwendung der gemittelten Kurven gleicher Lautstärke bringt keinen

nennenswerten Fehler mit sich, da die individuellen Isophonen der Beobachter Z und B, die gemessen haben, recht gut mit den angegebenen Kurven übereinstimmen. Auch die Meßpunkte der beiden Beobachter stimmten innerhalb der möglichen Meßgenauigkeit sehr gut überein, so daß wir uns auf die Wiedergabe der Meßergebnisse eines Beobachters beschränken können.

Je höher der Schalldruck und je geringer der Abstand der Teiltöne wird, desto höher liegen die errechneten Werte über den gemessenen. Das rührt daher, daß die Töne sich gegenseitig teilweise verdecken. Besser spricht man allerdings von einer Lautheitsdrosselung [2], da ja im allgemeinen keiner der drei Töne völlig unhörbar wird. Man kann auch diese gegenseitige Drosselung in der Rechnung berücksichtigen und erhält dann die durch Δ bezeichneten Punkte. Das Rechenverfahren soll in einer späteren Arbeit beschrieben werden. Das in der Arbeit [2] angegebene Verfahren ist für Linienspektren nicht ohne weiteres anwendbar.

Verringert man die Modulationsfrequenz so weit, daß die gesamte Bandbreite Δf kleiner wird als die Breite Δf_G der Frequenzgruppe, so ändert sich beim Überschreiten dieser Grenze die Lautstärke ziemlich rasch und bleibt bei weiterer Abnahme der Modulationsfrequenz bis zu $f_{mod} = 10$ Hz konstant. Die Bandbreite Δf_G , die in Abb. 4 durch $\Delta f = \Delta f_G$ bezeichnet ist, erweist sich, wie bei den früheren Messungen [3], [4], [5], als sehr deutliche Grenze. Sie trennt zwei Bereiche, in denen das Ohr die Lautheit nach ganz verschiedenen Gesetzen bildet. Ist das Band Δf breiter als eine Frequenzgruppe, so ist, wie wir gesehen haben, die Lautheit gleich der Summe der Lautheiten der einzelnen Komponenten. Bei hohem Pegel drosseln sich die Teiltöne noch gegenseitig. Ist dagegen das Band Δf schmaler als eine Frequenzgruppe, so erscheint der Dreiklang gleich laut wie der Bandmittenton mit demselben Effektivwert¹, solange die Modulationsfrequenz größer als etwa 10 Hz bleibt. Das Gehör beurteilt also in diesem Bereich die Lautstärke einfach nach der Leistung.

Es verdient besondere Beachtung, daß die Lautstärke unabhängig ist von der Phasenlage der einzelnen Teiltöne. Das ist vor allem deshalb nicht selbstverständlich, weil bekannt ist, daß das Gehör gerade dann Phasenunterschiede wahrnehmen kann, wenn die beteiligten Töne in die gleiche Frequenzgruppe fallen [3]. Auch in den hier beschriebenen Versuchen fanden wir

¹ Auch aus diesem Grund tragen wir als Maß für die Lautstärke den Pegel des gleich lauten Bandmittentones auf, nicht wie üblich den des gleich lauten 1000-Hz-Tones.

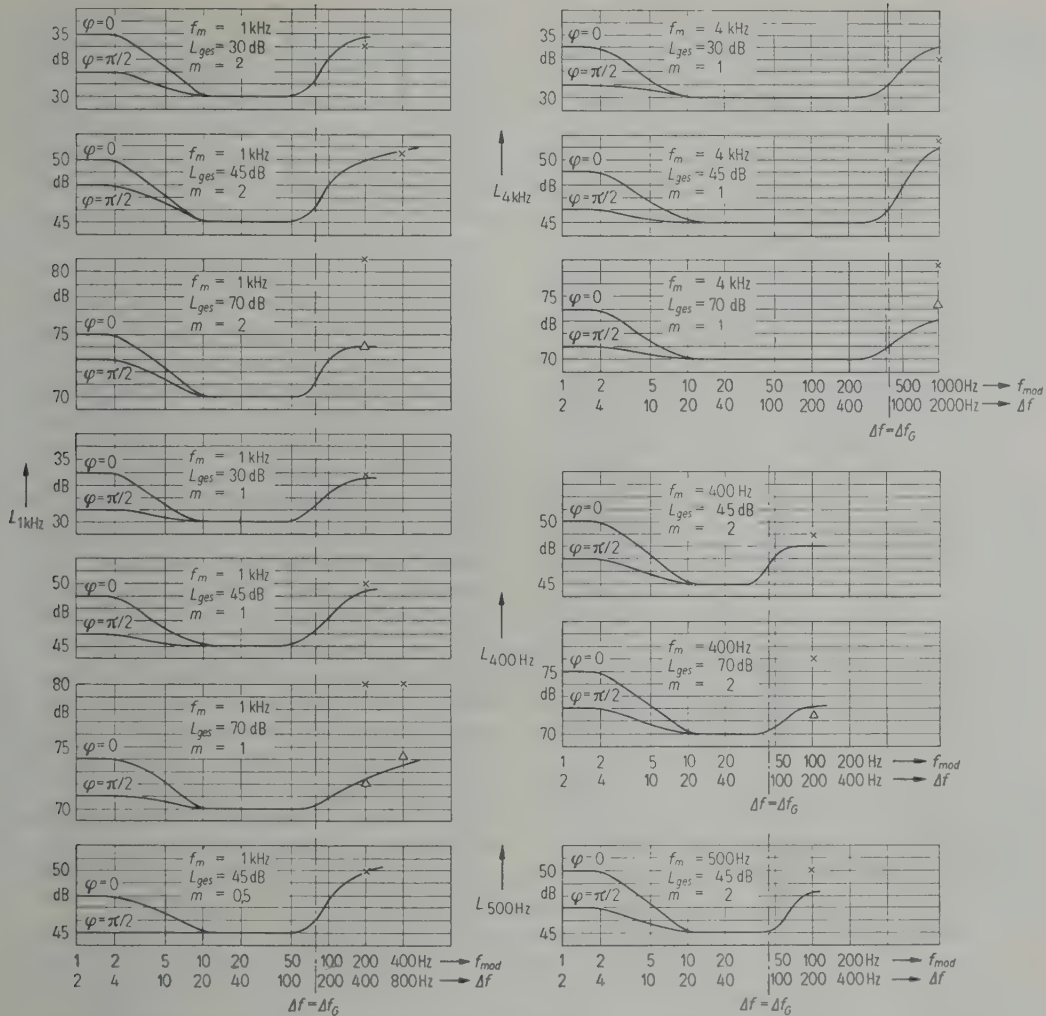


Abb. 4. Lautstärke dreier kohärenter Töne in Abhängigkeit vom Linienabstand; f_m , L , φ und m sind Parameter.

bestätigt, daß man eine deutliche Änderung des Klangcharakters wahrnimmt, wenn man bei gleicher Amplitude der Teiltöne den Winkel φ verändert. Die Lautstärke hingegen ist im ganzen Bereich zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ die gleiche. Nur bei hohem Schalldruckpegel (70 dB) stellen manche Beobachter bei reiner Amplitudenmodulation ($\varphi = 0$) den Vergleichston 1 dB lauter ein als bei geringerer Amplitudenschwankung im Fall $\varphi = \pi/2$. Die stärkere Amplitudenschwankung bei $\varphi = 0$ bedingt eine „Rauhigkeit“ des Tones, die vom Gehör als unangenehm empfunden wird. Es handelt sich aber, wie gesagt, nur um einen Unterschied von 1 dB, der praktisch bedeutungslos ist.

Es bleibt also bei unserer Aussage: Die Lautstärke dreier kohärenter Sinustöne, die in die gleiche Frequenzgruppe fallen, ist, unabhängig

von der Phasenlage der Teiltöne, gleich der Lautstärke des Bandmittentones mit dem gleichen Effektivwert, wenn der Linienabstand f_{mod} größer als 10 Hz ist.

Es sei noch vermerkt, daß auch die Lautheit von Linienspektren aus einer großen Anzahl von Teilschwingungen nach dem gleichen Gesetz gebildet wird. Schickt man eine Impulsfolge durch ein Filter, dessen Durchlaßbereich schmaler ist als eine Frequenzgruppe, so erhält man einen Klang aus einer großen Anzahl in der Phase starr gekoppelter Töne. Der Frequenzabstand von Linie zu Linie ist gleich der Pulsfrequenz. Die Lautstärke dieses Klanges ist ebenfalls gleich der Lautstärke des Bandmittentones mit gleichem Effektivwert wie der ausgeschnittene Anteil des Pulses. Das Gesetz ist unabhängig vom zeitlichen Verlauf des Schalldrucks, also

von der Phase der Teiltöne, sofern nur die Pulsfrequenz höher als 10 Hz ist.

Auch wenn man eine Anzahl Töne verwendet, die in eine Frequenzgruppe fallen, die aber von verschiedenen Generatoren erzeugt werden, also inkohärent sind, so zeigt sich wieder, daß auch ihre Lautstärke ebenso groß ist wie die eines Tones, der in die gleiche Frequenzgruppe fällt und der den gleichen Effektivwert besitzt wie alle dargebotenen Töne zusammen. Es muß nur der Abstand der einzelnen Töne so gewählt werden, daß man den Amplitudenschwankungen nicht folgen kann.

Die gleichen Gesetze findet man, wenn man die Lautstärke von Bandpaßrauschen untersucht [2].

Zusammenfassend kann man bis jetzt sagen: Innerhalb einer Frequenzgruppe empfindet das Gehör gleiche Leistung als gleich laut, wenn nicht Leistungsschwankungen auftreten, die so langsam verlaufen, daß das Gehör ihnen folgen kann.

Welche Lautstärke das Ohr empfindet, wenn langsame Schwankungen auftreten, soll nun noch untersucht werden. Wir betrachten wieder die Darstellung der Lautstärke unseres Dreiklanges, Abb. 4. Ist die Modulationsfrequenz kleiner als 2 Hz, so hört man einen Ton der Frequenz f_m , dessen Lautstärke im Rhythmus der Modulationsfrequenz zwischen einem größten und einem kleinsten Wert schwankt. Man stellt den Vergleichston unwillkürlich auf die höchste empfundene Lautstärke ein. Offensichtlich ist dieser Höchstwert wesentlich leichter anzugeben als die kleinste Lautstärke oder ein Mittelwert.

Bezeichnet man mit p_{Tr} den effektiven Schalldruck des Trägers, so wird bei $\varphi = 0$ als Höchstwert der Lautstärke die eines Tones vom Effektivwert $(1 + m)p_{Tr}$ empfunden. Der Effektivwert der drei Linien zusammen beträgt $\sqrt{1 + (m^2/2)} p_{Tr}$. Demnach liegt die höchste Lautstärke bei $f_{mod} = 2$ Hz entsprechend dem Druckverhältnis $(1 + m)/\sqrt{1 + (m^2/2)}$ höher als bei $f_{mod} = 10$ Hz, wo infolge der Trägheit des Ohres der Effektivwert der drei Töne gebildet wird. Die Rechnung liefert bei $m = 2$ den Faktor $\sqrt{3}$, entsprechend 4,8 dB, bei $m = 1$ den Faktor 1,63 entsprechend 4,2 dB und bei $m = 0,5$ den Faktor $\sqrt{2}$ entsprechend 3 dB in guter Übereinstimmung mit den Meßwerten.

Hat man den Phasenwinkel $\varphi = \pi/2$ eingestellt, so erreicht der Summenzeiger der Abb. 3 nur den Höchstwert $\sqrt{1 + m^2} p_{Tr}$. Also liegt der Meßpunkt bei $f_{mod} = 2$ Hz um den Faktor $\sqrt{(1 + m^2)/1 + (m^2/2)}$ über dem Effektivwert. Man errechnet daraus für $m = 2$ eine Zunahme

des Pegels des Vergleichstones um 2,2 dB, bei $m = 1$ um 1,2 dB und bei $m = 0,5$ um 0,5 dB, was auch die Messung ergab. Steigert man die Modulationsfrequenz über 2 Hz, so kann das Gehör infolge seiner Trägheit den zeitlichen Schwankungen nicht mehr ganz folgen, die maximale Lautheit nimmt ab. Von $f_{mod} = 10$ Hz ab nimmt man keine Intensitätsschwankung mehr wahr. Das Gehör bildet einen zeitlichen Mittelwert, und zwar, wie wir gesehen haben, den Mittelwert der Leistung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß sich die Grenze des zeitlichen Auflösungsvermögens zwischen 2 und 10 Hz mit der anderweitig häufig gemessenen Trägheit des Ohres in Einklang bringen läßt. Man schreibt dem Gehör eine Trägheitszeitkonstante von etwa $T = 60$ ms zu. Allerdings haben Messungen von G. von BÉKÉSY u. a. gezeigt, daß zumindest der Abklingvorgang nach dem Abschalten eines Tones nicht nach einer Exponentialfunktion verläuft. Die gemessene Abklingzeit von 140 ms rechtfertigt aber, rein zahlenmäßig mit einer Zeitkonstante von etwa 60 ms zu rechnen, um die Größenordnung der Frequenz abzuschätzen, bis zu der das Gehör Leistungsschwankungen folgen kann. Als Grenzfrequenz des trägen Systems ergibt sich dann $\omega_g = 1/T$, bzw. $f_g = 1/2 \pi T = 1/2 \pi \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \approx 2,7$ Hz. Die gemessene Grenze des zeitlichen Auflösungsvermögens des Gehörs oberhalb von 2 Hz entspricht also der in anderen Versuchen ermittelten Ohrträgheit.

Damit sind die Gesetze der Lautheitsbildung eines Klanges aus drei Tönen für jeden beliebigen Linienabstand f_{mod} bekannt. Man hat, wie schon zu Anfang dieses Abschnittes erwähnt, drei Bereiche zu unterscheiden:

Ist die Modulationsfrequenz kleiner als 2 Hz, so hört man einen in seiner Leistung an- und abschwellenden Ton und registriert den Höchstwert dieser Leistung als Lautstärke. Steigert man die Modulationsfrequenz über 2 Hz bis auf etwa 10 Hz, so nimmt die empfundene größte Lautstärke ab, da das Gehör infolge seiner Trägheit den Schwankungen nicht mehr folgen kann. Die Mitte dieses Übergangsgebietes liegt etwa bei $f_{mod} = 3$ Hz.

Von $f_{mod} = 10$ Hz an empfindet man gleiche Leistung als gleich laut. Die Lautstärke bleibt bei weiterer Steigerung der Modulationsfrequenz konstant und ist gleich der Lautstärke eines reinen Tones, der in die gleiche Frequenzgruppe fällt und der denselben Effektivwert besitzt wie der Dreiklang. Dieses Gesetz gilt, solange die Bandbreite Δf kleiner ist als die Breite Δf_g der

Frequenzgruppe. Die Bandbreite $\Delta f = \Delta f_G$ stellt eine sehr deutliche Grenze dar.

Überschreitet die Bandbreite Δf diese Grenze, so ändert sich das Gesetz, nach dem das Gehör die Lautheit bildet, völlig. Die Gesamtlautheit der drei Töne ist bei kleinem und mittlerem Pegel gleich der Summe der Lautheiten der einzelnen Komponenten. Ist der Pegel der Teiltöne höher als etwa 45 dB, so muß die gegenseitige Drosselung berücksichtigt werden.

Das Gehör bildet also dann, wenn die einzelnen Teiltöne in verschiedene Frequenzgruppen fallen, zunächst die Lautheit innerhalb jeder Frequenzgruppe und addiert darauf diese Teillautheiten. Man darf demnach vermuten, daß man die Lautheit eines Klanges aus vielen Tönen nach der gleichen Methode berechnen kann, wie die Lautstärke von Bandpaßrauschen [2]: Man teilt das gesamte Spektrum in Teilbänder auf. Die Breite jedes Teilbandes ist gleich der Breite Δf_G einer Frequenzgruppe zu wählen. In jeder Frequenzgruppe bestimmt man den Effektivwert des Schalldruckes, aus den Isophonen entnimmt man die Lautstärke und darauf aus der Lautheitskurve die Lautheit, die in jeder Frequenzgruppe gebildet wird. Schließlich addiert man die Lautheiten und erhält die Lautheit des gesamten Klanges. Ist der Schalldruckpegel je Frequenzgruppe höher als 45 dB, so tritt Lautheitsdrosselung ein. Führt man die Berechnung eines Klanges nach diesem Verfahren durch, so stimmen

gerechnete und gemessene Lautheit meist innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Nur wenn der zeitliche Verlauf des Schalldrucks eine sehr spitzenhaltige Kurve ergibt, liefert das beschriebene Rechenverfahren merklich zu geringe Werte für die Lautheit. Ein Beispiel für ein solches Schalleignis ist eine Folge von Nadelimpulsen mit einer Anstiegszeit von weniger als 0,2 ms.

Ich danke Herrn Professor Dr. R. FELDTKELLER für viele Ratschläge, die sehr zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Zu Dank verpflichtet bin ich auch Herrn Dr.-Ing. E. ZWICKER für viele fruchtbare Diskussionen und seine tatkräftige Mithilfe bei allen Messungen.

(Eingegangen am 8. Juli 1955.)

Schrifttum

- [1] FLETCHER, H. und MUNSON, W. A., Loudness, its definition, measurement, and calculation. J. acoust. Soc. Amer. **5** [1933], 82.
- [2] ZWICKER, E. und FELDTKELLER, R., Über die Lautstärke von gleichförmigen Geräuschen. Acustica **5** [1955], 303.
- [3] ZWICKER, E., Die Grenzen der Hörbarkeit der Amplitudenmodulation und der Frequenzmodulation eines Tones. Acustica **2** [1952], Beiheft 3, AB 126.
- [4] GÄSSLER, G., Über die Hörschwelle für Schalleignisse mit verschieden breitem Frequenzspektrum. Acustica **4** [1954], Beiheft 1, 408.
- [5] ZWICKER, E., Die Verdeckung von Schmalbandgeräuschen durch Sinustöne. Acustica **4** [1954], Beiheft 1, 415.
- [6] ZWICKER, E. und GÄSSLER, G., Die Eignung des dynamischen Kopfhörers zur Untersuchung frequenzmodulierter Töne. Acustica **2** [1952], Beiheft 3, AB 134.

A METHOD FOR THE MEASUREMENT OF THE DIRECTIVITY FACTOR

by GINO SACERDOTE and CESARINA BORDONE SACERDOTE

Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris, Torino, Italy

Summary

An electromechanical apparatus for the direct determination of the directivity factor of a loudspeaker: it can be employed to determine in a very short time its characteristics of directivity as a function of frequency.

Sommaire

On décrit un dispositif électromécanique pour déterminer de façon directe le facteur de directivité d'un haut-parleur: ce dispositif peut servir à déterminer très rapidement la caractéristique de directivité en fonction de la fréquence.

Zusammenfassung

Es wird eine elektromechanische Apparatur zur unmittelbaren Bestimmung des Richtfaktors von Lautsprechern beschrieben. Mit diesem Gerät läßt sich in sehr kurzer Zeit die Richtcharakteristik als Funktion der Frequenz ermitteln.

Various parameters can be employed to represent the behaviour of loudspeakers; one of the most interesting is the directivity factor Q , which is calculated from the directional properties of the sound source.

The directivity factor is the ratio of the intensity on a designated axis of a transducer at a stated distance to the intensity that would be produced at the same position by a spherical source radiating the same total acoustic power.

A free field is assumed as the environment for the measurement; generally the designated axis is the principal axis of the sound source, and Q is greater than 1.

From the directivity factor the directivity index DI can be calculated, which depends on Q by the relation

$$DI = 10 \log_{10} Q.$$

The intensity radiated from a sound source at a distance r in a free field is given by

$$I = p^2 / \rho c,$$

where p is the sound pressure, ρ the density of air, c the speed of sound.

With a point source the intensity does not depend on the direction on which it is calculated; the total radiated power is then

$$W = 4 \pi r^2 p^2 / \rho c.$$

With a non-spherical source the total radiated power is given by:

$$W = \frac{r^2}{\rho c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p^2(\vartheta, \varphi, r) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

where ϑ and φ are the degrees of longitude and co-latitude in a system of polar coordinates; the polar axis is the principal axis of the sound source.

The directivity factor is then given by

$$Q = \frac{4 \pi p_{ax}^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi},$$

where p_{ax} indicates the sound pressure on the principal axis.

Very frequently the sound source presents an axial symmetry; then the relation expressing the directivity factor is simpler

$$Q = \frac{2 p_{ax}^2}{\int_0^{\pi} p^2(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta}.$$

With conical loudspeakers this relation is generally employed, as the cone is supposed to radiate a symmetrical pattern around its principal axis.

Let us consider the simpler case: a small source radiating a pure tone; generally its directivity is measured (by plotting its directivity pattern) in a dead room, turning the source on an axis perpendicular to its principal axis, and recording the sound pressure with a microphone in a symmetrical plane (at a great distance as compared with the sound wave-length of the source).

It is necessary to calculate the integral

$$\int_0^{\pi} p^2(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

In most cases the integral is substituted by a summation that gives an approximate value of the directivity factor.

Some authors have proposed graphical methods of integrating the preceding formula, by adjusting the coordinates of the chart on which the polar patterns are plotted. We will recall the papers of BAUMZWEIGER [1] and of KENDIG and MUESER [2] on this subject.

Different apparatus can be employed to evaluate the integral $\int p^2 \sin \vartheta \, d\vartheta$; the calculation is made easy by the modern technique of the electronic computers.

The measurement has to be carried out in a sufficiently short time: we have theoretically and experimentally proved that the directivity pattern does not change by a perceptible amount when the loudspeaker turns at the speed of 2 turns per second; higher speeds are perhaps not inconvenient, but with the electromechanical apparatus we have employed this speed is high enough.

In the apparatus we have realized, the mathematical operations follow in order: first the microphonic voltage V_m is squared, then an electromechanical apparatus evaluates the product $V_m^2 \sin \vartheta$; finally there is the integration of the product $V_m^2 \sin \vartheta$.

In directivity patterns of loudspeakers at high frequencies the difference of level between minimum and maximum can reach 30 dB; it is not easy to realize an electronic or electrical device with such power. Apparatus based on the square characteristics of vacuum tubes or of oxide-coated rectifiers reach with some difficulty a level of 20 dB, which is not enough in our case.

For a convenient indicator, we have chosen an electromechanical device, that is a transducing potentiometer, which from the level of the microphonic voltage expressed in dB gives an indication proportional to the square of the sound pressure.

A high-speed level recorder helps in transducing this indication: its writing pen is connected by means of an insulating light bar to the electrical contact of a potentiometer, as Fig. 1 shows. According to its needs, the potentiometer is fed by alternating or direct voltage; a constant resistance of 300 Ω is inserted between one of the ends of the transducing potentiometer and its moving contact (rigidly connected to the movements of the writing pen).

The resistances of this potentiometer are functions of the characteristics of the device: in our case the potentiometer has 31 contacts, corre-

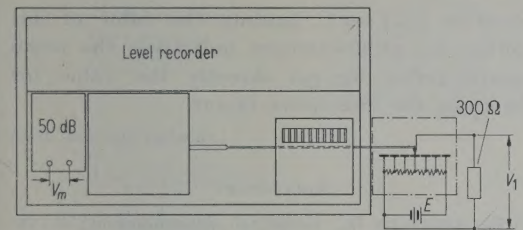


Fig. 1. Scheme of electromechanical apparatus with square characteristics.

sponding to a movement of 30 dB of the pen of the recorder; the values of the resistances have been calculated to produce at the ends of the 300 Ω resistance a voltage V_1 proportional to the square of the microphonic voltage V_m .

We record in Table I the values of the resistances of our potentiometer; at the ends of the device we have $V_1 = 0,9 V_m^2$ (V_1 and V_m are expressed in volts).

Table I
The values of the resistances of the squaring potentiometer and of the corresponding microphonic voltages expressed in dB:

dB		dB	
1	2.8	16	1158.0
2	3.5	17	1342.4
3	4.5	18	1221.9
4	5.9	19	1037.2
5	7.7	20	838.6
6	10.1	21	689.0
7	14.1	22	534.9
8	17.9	23	428.5
9	25.6	24	343.3
10	36.7	25	292.6
11	56.9	26	201.3
12	87.0	27	174.3
13	155.5	28	138.3
14	309.2	29	110.2
15	664.2	30	87.6

After this the product $V_m^2 \sin \theta$ has to be evaluated: the method we have employed is applied to the technique of radar to give a sinusoidal electromotive force.

A square mill-board is covered with a resistance wire: two electrodes are placed on it as in Fig. 2; when an electromotive force E is applied between A and B, we have between B and C an electromotive force proportional to the modulus of $\sin \theta$.

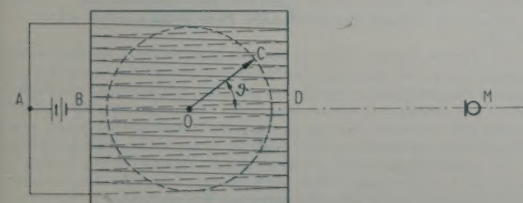


Fig. 2. Scheme of device for the calculation of the product $V_m^2 \sin \theta$.

The moving contact C turns around the same axis as the loudspeaker, to which it is rigidly connected; the principal axis of the loudspeaker is coincident on OC; the microphone is placed on the axis OD.

If we apply between A and B the voltage V_1 out of the circuit of Fig. 1 (that is proportional to V_m^2) the electromotive force between B and C is proportional to $V_m^2 \sin \theta$.

The ohmic resistance of the mill-board is about 300 Ω. The intermediate value of the electromotive force between B and C is proportional to the integral we want to calculate.

To have directly the intermediate value of $V_m^2 \sin \theta$, a direct current instrument with high internal resistance and high damping (or a resistance and capacitance integrating device) is between the moving contact and the mid-point of the mill-board.

By this method the directivity factor can be measured in a very short time at every frequency. For the calibration of the device, a constant microphonic voltage is applied, corresponding to a radiating source with directivity factor 1, and the proportionality constant of the device is calculated from this measurement.

As the loudspeaker is turning, the microphonic voltage applied to the level recorder is amplitude modulated as a function of time. The value read off the integrating instrument is directly proportional to the directivity factor; the ratio is given by the measurement with constant microphonic voltage.

According to the characteristics of the apparatus, at every measurement the microphonic voltage maximum, on the principal axis of the loudspeaker, has to be regulated, so that the same proportionality constant is valid for every measurement. However a very short time is necessary for the measurement.

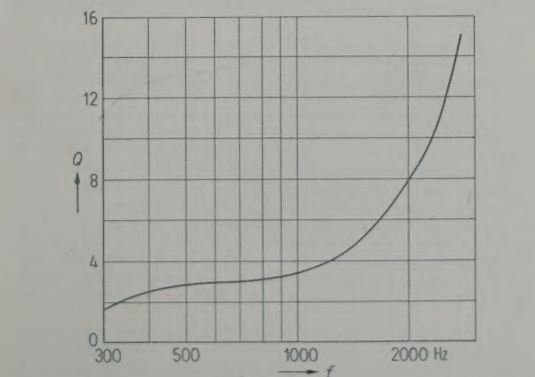


Fig. 3. Directivity factor of a loudspeaker as a function of frequency.

The apparatus has been experimentally tested on an electrodynamic loudspeaker, with no baffle, of 20 cm diameter. In Fig. 3 we have plotted its directivity characteristics, resulting from the measurements with our apparatus.

Other apparatus with perhaps simpler elements can be studied for the same measurement: we have considered too a mill-board (Fig. 2) of different shape that gives an electromotive force proportional to $\sqrt{\sin \vartheta}$; when the microphonic voltage is applied directly to the ends of the mill-board, the output between B and C is propor-

tional to $V_m \sqrt{\sin \vartheta}$; reading the value of this voltage on an instrument indicating the mean square value, we get directly the value for obtaining the directivity factor.

(Received 10th June, 1955.)

References

- [1] BAUMZWEIGER, B., Graphical determination of the random efficiency of microphones. J. acoust. Soc. Amer. **11** [1940], 477.
- [2] KENDIG, P. M. and MUESER, R. E., A simplified method for determining transducer directivity index. J. acoust. Soc. Amer. **19** [1947], 691.

Physikertagung Wiesbaden

Die letzte, von über 1500 Physikern besuchte Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft fand in der Zeit vom 22. bis 28. September 1955 im Kurhaus Wiesbaden statt. Für die im Rahmen dieser Tagung angesetzte Sitzung des Fachausschusses Akustik, über die hier berichtet werden soll, hatte man am Nachmittag des 23. September den kleinen Kurhaussaal zur Verfügung gestellt. Die Sitzung stand dadurch im Zeichen einer sehr schlechten Akustik — sprich: großen Nachhallzeit —, doch zog sie trotz der schlechten Verständlichkeit, die durch die Lautsprecheranlage kaum gemildert wurde, eine recht stattliche Zuhörerzahl an.

Nach den in seiner Eigenschaft als Vorsitzender des Ausschusses gesprochenen Begrüßungsworten hielt E. MEYER, Göttingen, das zusammen mit H. SEVERIN angekündigte, einleitende Referat über Analogien zwischen akustischen und elektrischen Absorptionsanordnungen. Die wegen der gleichen Größenordnung der Wellenlänge naheliegenden Analogiebetrachtungen erstreckten sich zunächst auf die Breitbandabsorber, d. h. auf keilförmige Schluckstoffanordnungen für akustische Wellen und den „elektrischen Sumpf“ für Zentimeterwellen, letzterer nunmehr ebenfalls in der Art hergestellt, daß der stetige Übergang ins absorbierende Medium hinein durch eine geeignete geometrische Struktur erreicht wird. Weiter wurden dann in Analogie zu Resonanzabsorbern der verschiedenen Typen für Luft- und Wasser-schall interessante Absorber für elektromagnetische Wellen gezeigt, die ihre Existenz eben diesen Analogiebetrachtungen verdanken. Die Ersatzschaltbilder der akustischen Anordnungen führen — in die Sprache der Zentimeterwellentechnik übersetzt — zu Absorptionsanordnungen, bei denen die Resonanzkreise aus kleinen, mit leitfähigem Material aufgemalten Dipolen, aus dielektrischen Schichten bestimmter Dicke und aus Koaxialleitungsstücken bestehen. Die Brauchbarkeit solcher Anordnungen für die Praxis wurde an Hand von Meßergebnissen und durch einige kleine Experimente eindrucksvoll demonstriert.

Der Beitrag von K. TAMM und H. J. NAAKE, Göttingen, vorgetragen von K. TAMM, behandelte die Schallausbreitung in Platten und Stäben aus gummielastischem Material. Das wegen der zur Erfüllung der Randbedingungen notwendigen Überlagerung von Longitudinal- und Transversalwellen unübersichtliche Bild der Schallausbreitung in begrenzten Medien wird hier übersichtlicher, da die Geschwindigkeit der letzteren in gummielastischen Stoffen sehr viel kleiner ist als die der Longitudinalwellen. Solange die Longitudinalwellenlänge groß gegen die Querabmessungen ist, sind die Transversalwellen allein, bei höheren Frequenzen die Dispersionsäste beider Wellentypen bestimmend. Bei Vorhandensein einer Dämpfung sind schließlich, wie in einer Flüssigkeit, die Longitudinalwellen allein bestimmend. An Hand der Ergebnisse von Dämpfungsmessungen wurde gezeigt, daß unterhalb der erwähnten Grenzfrequenz der Verlustfaktor des Schubmoduls maßgebend ist, während bei höheren Frequenzen eine wesentlich kleinere Dämpfung auftritt, was auf den kleineren Einfluß des Schubmoduls zurückgeführt wird.

Über Ultraschallabsorption durch Assoziation in verdünnten organischen Lösungen berichtete W. MAIER, Freiburg i. Br., der einen in Spezialfällen gangbaren Weg angab, Reaktionsdaten sehr schnell verlaufender Reaktionen aus Messungen bei nur einer Frequenz abzuschätzen. Nach Diskussion der Möglichkeiten, die Absorption durch Assoziation von der veränderten Absorption des Lösungsmittels zu trennen, wurden für den Fall der dimer asso-

zierenden Benzoesäure die gemessenen Temperatur- und Konzentrationsabhängigkeiten mit der Theorie verglichen. Die theoretische Behandlung polymer assozierender Substanzen setzt vorerst noch stark vereinfachende Annahmen voraus. Für das polymer assoziierende Propanol wurde die Relaxationszeit aus Messungen bei zwei verschiedenen Frequenzen abgeschätzt.

Mit der Formgebung von Hallräumen befaßte sich der Beitrag von G. VENZKE, Braunschweig, der umfangreiches experimentelles Material zu vielen in diesem Zusammenhang interessierenden Fragen vorlegte. An Hand der beobachteten Krümmung der Nachhallkurven sowie aus den Resultaten von Messungen mit bestimmten Materialien wurde der Einfluß von Raumgröße, Form und Diffusität aufgezeigt. Ferner wurde der Einfluß der Prüf-stoffverteilung und -menge auf den gemessenen Schallabsorptionsgrad untersucht.

H. MRASS, Braunschweig, brachte einen Beitrag zur Definition und Messung der Normalhörschwelle. Zu diesem insbesondere für die Kalibrierung von Audiometern wichtigen Problem wurde eine Festlegung der Kupplerschalldrucke vorgeschlagen. Die Ergebnisse der mit einem ausgewählten Personenkreis unter Benutzung eines vereinfachten Békésy-Audiometers vorgenommenen Hörschwellenmessungen wurden mit bekannten Telephon- und Freifeldmessungen verglichen.

W. EISENMENGER, Göttingen, berichtete über Messungen des elektrokinetischen Effektes an porösen Glasfilterplatten im Ultraschallfeld. Die in destilliertem Wasser zwischen den beiden Plattenoberflächen auftretenden Potentialdifferenzen wurden im Frequenzbereich von 20 bis 200 kHz gemessen und mit der Theorie verglichen. Ein elektrokinetisches Sondenmikrophon kleiner Abmessungen wurde beschrieben.

Ein Beitrag zur Frage der Entstehung der Stoßwellen bei der Kavitation wurde durch W. GÜTH, Göttingen, gegeben. Hierbei wurde die Rayleighsche Beschreibung eines implodierenden Hohlraumes dahingehend erweitert, daß mit Anwesenheit einer geringen Luftmenge im Innern des Hohlraumes gerechnet wurde. Aus der im Verlaufe des Implosionsvorganges auftretenden, durch Trägheitskräfte bedingten Druckverteilung wurde die Form der abgestrahlten Stoßwelle näherungsweise ermittelt, die dadurch charakterisiert ist, daß die vordere Flanke der Stoßwelle flach, die hintere dagegen steil ist. Diese Anschauung stimmt mit experimentellen Ergebnissen gut überein, die durch Schlierenaufnahmen der Stoßwellen implodierender Kavitationsblasen gewonnen wurden. Eine einfache Apparatur, die es gestattet, große Kavitationsblasen zu erzeugen und in beliebiger Phase zu beobachten, wurde beschrieben.

F. BARTHEL, Berlin, berichtete über die Nichtlinearität des Strömungswiderstandes poröser Bausteine. Aus Messungen des statischen und des dynamischen Strömungswiderstandes wurde gefunden, daß bei feinporigen Stoffen gute Übereinstimmung zwischen den beiden Größen besteht, während bei porösen Bausteinen der Wert des dynamischen Strömungswiderstandes stets höher liegt und oberhalb etwa 100 dB mit der Amplitude der Schnelle wächst.

Das letzte Referat von Th. LANGE, Lippstadt, befaßte sich mit der Reichweite von Verkehrssignalen. Hier wurde gezeigt, daß neben den normalen Witterungseinflüssen vor allem die turbulente Wirbelschleppung für eine starke Schallschwächung verantwortlich ist und daß damit besonders beim Überholvorgang die Wahrnehmbarkeit der Signale beeinträchtigt wird.

C. Kurtze